KURVINTEGRALER

Låt $f(x, y, z)$ vara en konrinuerlig funktion och låt $\mathcal{C}$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in [a, b]$, vara en glatt kurva i rummet (dvs $\mathbf{r}'(t)$ är kontinuerlig och $\neq 0$ för alla t).
Med *kurvintegralen* av $f(x, y, z)$ över (eller längs) kurva $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))||\mathbf{r}'(t)||dt.$$

Om $\mathcal{C}$ är styckvis glatt kurva dvs består av bitar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ "hopklistrade" vid ändpunkterna och som var och en är glatta kurvor, så definierar man kurvintegralen som summan

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z)ds + \ldots + \int_{\mathcal{C}_n} f(x, y, z)ds.$$

Vet att längden av $\mathcal{C}$ ges av

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt.$$

Låt F vara ett kontinuerligt vektorfält i planet: $F(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D (enöppen mängd). Om $\mathcal{C}$ är en orienterda glatt kurva i D med parameterframstälningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$ så kallas uttrycket

$$\int_a^b F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t))dt$$

för *kurvintegralen av fältet* F längs kurvan $\mathcal{C}$.
Den betecknas $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r}$ eller $\int_{\mathcal{C}} f dx + g dy$. I det senare fallet talar vi också om *kurvintegralen av differentialformen* $f dx + g dy$.

Om $\mathcal{C}$ är styckvis glattkurva med glatta bitar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n$ definieras kurvintegralen som

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\mathbf{r} + \ldots + \int_{\mathcal{C}_n} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Om kurvan $\mathcal{C}$ är sluten kallas ofta kurvintegralen för cirkulationen av F runt $\mathcal{C}$ och betecknas $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r}$.

Vi har $\mathbf{r}'(t)dt = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}||\mathbf{r}'(t)||dt = \hat{\mathbf{T}}ds$, där $\hat{\mathbf{T}}$ är enhetstangenten till kurvan, $ds = ||\mathbf{r}'(t)||dt$ är båglängdselementet. Vi har alltså

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} F \cdot \hat{\mathbf{T}}ds.$$

Den fysikaliska tolkningen av kurvintegralen är det arbete fältet utför (dvs den energi som fältet tillför en partikel) för att förflytta partikeln längs kurvan.

Sats 15.4.1 Låt D vara ett öppet sammanhängande område och låt F vara ett glatt vektorfält definierat på D. Då är följande tre utsagor ekvivalenta:

- F är konservativt i D.
- $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten styckvis glatt kurva $\mathcal{C}$ i D.
- Om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två styckvis glatta kurvor i D med gemensamma start- och slutpunkter så är

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Om F är konservativt med potential ϕ och $\mathcal{C}$ är en styckvis glatt kurva med startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

.

Sats 16.3.6 (GREENS FORMEL) Låt D vara ett kompakt område i planet vars rand C består av en eller flera styckvis glatta enkla slutna kurvor positivt orienterade relativt D (dvs området D ligger till *vänster* om kurvan). Antag också att $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ är ett glatt vektorfält i öppen mängd Ω som innehåller D. Då gäller

$$\oint_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

Area som kurvintegral

Antag att C är den positivt orienterade randen till D. Då gäller

$$\oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2}\oint_C x dy - y dx = \text{Arean av } D.$$