YTOR OCH YTINTEGRALER

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion r definierad på en rektangel $R = \{(u,v) : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i uv-planet och med värden i $\mathbb{R}^3$:

$$r(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, (u,v) \in R.$$

Notera att alla punkter på ytan är randpunkter eftersom ytan är ett två-dimensionellt objekt"i $\mathbb{R}^3$. Punkter på ytan som motsvaras av inre punkter i området R kallas trots detta inre punkten på ytan. Randen till området R avbildas ibland på en kurva som avgränsar ytan. Den kurvan kallas i så fall för ytans rand.

En parametriserad yta är *glatt* om funktionen $r = r(s,t)$ som ger parametriseringen är glatt och $\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \neq 0$ för alla s och t.
Tangentplanet till ytan i den punkt som har parametervärdena (s,t) spänns upp av vektorerna r'_s och r'_t, $r'_s \times r'_t$ är normalen till ytan.
Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, "hoppklistradelängs randkurvor.

Låt $r = r(u,v)$ vara en parameter framställning av en glatt yta $\mathcal{S}$ i rymden. Då är

$$dS = ||r'_u \times r'_v||dsdt$$

ett areaelement och arean av ytan $\mathcal{S}$ blir

$$\int\int_{\mathcal{S}} dS = \int\int_R ||\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}||dudv.$$

Eftersom

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

blir arean

$$\int\int_{\mathcal{S}} dS = \int\int_R \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv.$$

Ytintegralen av en funktion $f(x,y,z)$ över ytan $\mathcal{S}$ definieras enligt

$$\int\int_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \int\int_R f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))||\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}||dudv.$$

ORIENTERADE YTOR OCH FLÖDESINTEGRALER

En yta $\mathcal{S}$ kallas *orienterbar* om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{N}(P)$ definierat kontinuerligt på $\mathcal{S}$ i varje punkt ortogonalt mot $\mathcal{S}$. Ett vektorfält som uppfyller detta kallas för *orientering* av $\mathcal{S}$.

Om $\mathcal{S}$ är en parametriserad glatt yta ($\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ i alla punkter på ytan) så ger

$$\hat{N} = \pm \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) / || \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} ||$$

de två möjliga parametriseringar.
Den sidan av ytan åt vilken normalvektorn $\hat{N}(P)$ pekar kallas för den positive sidan, den andra kallas för negativa sidan.

Lå $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ vara ett kontinuerligt vektorfält.
Vektorfältets flöde genom en orienterad yta $\mathcal{S}$ är integralen

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

För parametriserade ytor är

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \pm \int \int_R \mathbf{F}(r(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) dudv$$

det senare är lika med

$$\pm \int \int_R f(x,y,z) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + g(x,y,z) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + h(x,y,z) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$$

Val av tecken $\pm$ innebär ett val av riktning i vilken flödet uppfattas positivt.

GRADIENT, DIVERGENCE OCH ROTATION

Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Man kan tänka sig om linjär avbildning

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

som verkar på f.
Den kan verka även på ett vektorfält: om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så är

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \cdot (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Sats 16.1.1 Låt B_ϵ vara ett klott med radie ϵ och medelpunkt P och låt S_ϵ vara randen till B_ϵ. Då g̈ller enligt divergenssatsen (16.4.8):

$$\int \int \int_{B_\epsilon} \text{div}\mathbf{F} dV = \int \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS,$$

där $\hat{N}$ är utåtriktad enhetsnormal till sfären S_ϵ och

$$\text{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

Ytintegralen kan ses som flödet ut ur punkten P", div$\mathbf{F}(P)$ kan tolkas som "källstyrka per volymenhet".

Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så definieras **rotation** curl$\mathbf{F}$ enligt

$$\begin{aligned}
\mathrm{curl}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \times (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Sats 16.1.2 Låt S vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och enhets normalvektor $\hat{N}$. Låt C vara randcirkeln genomlöpt moturssett från spetsen av $\hat{N}$. Då gäller enligt Stokes sats (16.5.10)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dr = \int\int_C (\mathrm{curl}\mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

och

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}(P) \cdot \hat{N} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_C F \cdot dr.$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan. curl$\mathbf{F}(P) \cdot \hat{N}$ kan alltså0 ses som fältets förmåga att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{N}$, förmågan är störst om $\hat{N}$ är parallell med curl$\mathbf{F}(P)$ och obefintlig om de är ortogonala.