GRÄNSVÄRDE

Låt P vara en punkt i $\mathbb{R}^n$, $r > 0$. Med en **omgivning** $B_r(P)$ till P menas mängden av alla punkter Q vars avstånd till P är mindre än r. P kallas en **inre punkt** i en delmängd A av $\mathbb{R}^n$ om det finns en omgivning till P som helt ligger i A. P är en **randpunkt** om varje omgivning till P råkar A och komplmentet till A.

Def. Låt f vara en reelvärd funktion av två variabler med definitionsmängd $D(f)$. Vi säger att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om

- varje omgivning till (a,b) innehåller punkter i $D(f)$ andra än (a,b);
- till varje positivt $\epsilon > 0$ finns ett positivt tal $\delta = \delta(\epsilon)$ sådant att $|f(x,y) - L| < \epsilon$ gäller för alla punkter $(x,y) \in D(f) \cap B_\delta(a,b)$.

Räkneregler för gränsvärden
För att underlätta formuleringarna utgår vi att alla inblandade funktioner har samma definitionsmängd.
Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$ så gäller

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y) + g(x,y)) = L + M$;
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)g(x,y)) = LM$;
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)/g(x,y)) = L/M$ om $M \neq 0$;
4. (**Instängningsregeln**) Om $f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y)$ och $L = M$ så $\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$

(**Sammansättningsregeln**) Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(D(f)) \subset D(g)$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, $\lim_{z\to L} g(z) = M$ så

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(f(x,y)) = M.$$

Kontinuitet

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (a,b) om $(a,b) \in D(f)$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
Vi säger att f är kontinuerlig om f är kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden $D(f)$.

Det följer ur definition och gränsvärderäkneregler att om f,g är kontinuerliga i (a,b) så är cf $(c \in \mathbb{R})$, $f + g$, fg, f/g (om $g(a,b) \neq 0$), $h \circ g$ om $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $f(a,b)$.

PARTIELL DERIVATA

Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med definitionsmängd $D(f)$ och antag att (a, b) är en inre punkt i $D(f)$.
Den partiella derivatan av f med avseende på x är funktionen $f_1(x, y)$ vars funktsionsvärde ges av gränsvärdet

$$f_1(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

i de punkter gränsvärdet existerar. På motsvarande sätt definieras $f_2(x, y)$, den partiella derivatan av f med avseende på y.

Olika skrivsätt för partiella derivator:

$$f_1(x,y) = D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

och i punkten (a, b)

$$f_1(a,b) = D_1 f(a,b) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{(a,b)} = f'_x(a,b) = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(a,b)}$$

Obs! $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar $\Rightarrow$ f är kontinuerlig.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar $\not\Rightarrow$ f är kontinuerlig.

TANGENTPLAN OCH NORMALER TILL FUNKTIONSYTOR

Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $P = (a, b)$ har funktionsytan $z = f(x, y)$ ett **tangentplan** i $(a, b, f(a, b))$. Detta har en egenskap att tangentlinjen till varje glatt kurvan genom $(a, b, f(a, b))$ på ytan ligger i detta plan. En **normalvektor** till ytan i punkten $(a, b, f(a, b))$ är en vektor $\mathbf{n} \neq 0$ som är ortogonal mot tangentplanet.

En normalvektor till ytan $z = f(x, y)$ i $(a, b, f(a, b))$ är vektorn

$$\mathbf{n} = f_1(a,b)\mathbf{i} + f_2(a,b)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

En ekvation för normallinjen i punkten är

$$\begin{cases} x = & a + t f_1(a,b) \\ y = & b + t f_2(a,b) \\ z = & f(a,b) - t \end{cases}$$

En ekvation för tangentplanet i punkten är

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b).$$