

# TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 13

## Vecko-PM läsvecka 2

Lay: 6.1-6.6

**Innehåll:** Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden

I kapitel 6.1 införs *skalärprodukt*, *dot product* och *längd*, eller *norm* som kanske är ett bättre namn. Dessa motsvarar skalärprodukt och längd för geometriska vektorer då vektorerna ges i en ON-bas. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. Ortogonal komplementet till ett underrum i  $\mathbb{R}^n$  är ett begrepp som generaliserar normalen till ett plan genom origo.

I avsnitt 6.2 är begreppet ON-bas, ortonormerad bas, viktigt. **Sats 4** säger att ortogonalitet garanterar linjärt oberoende. Sats 5 visar hur lätt det är att bestämma koordinater i en ortogonal bas. Ännu enklare är det i en ON-bas, då är  $x_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k$

Projektionsformeln, som ger projektionen av en vektor på en annan, är samma som inledande kursen. Motiveringen till formeln måste vara algebraisk eftersom vi inte har några vinklar i  $\mathbb{R}^n$ . Vi använde projektionsformeln i inledande kursen för att dela upp en vektor i två ortogonala komponenter, den ena med en given riktning och den andra i planet ortogonalt mot denna riktning. En vidareutveckling av denna idé kommer i sats 8 och sats 10 i 6.3. Begreppet ortogonala matriser som nämns i förbigående i 6.2 kommer att användas mycket i kapitel 7.

I 6.4 ges Gram-Schmidt processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum  $W$  då man har en annan bas för  $W$ . Metoden är enkel, det gäller att i varje steg använda projektionsformeln för att ersätta en vektor i basen med en som är ortogonal mot de redan bestämda vektorerna i den sökta ortogonala basen.

I avsnitt 6.5 ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning*. I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna lösning till ekvationen  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  av  $\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$ .

**Sats 13** ger metoden i en liten ask. Däremot har man inte direkt nytta av sats 14, det viktiga är att veta att om kolonnerna i  $A$  är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 13 entydig lösning.

**Mål:** Du skall kunna

- beräkna skalärprodukten av två vektorer i  $\mathbb{R}^n$ , tillämpa räkneregler för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i  $\mathbb{R}^n$  och beräkna avståndet mellan vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .
- avgöra om två vektorer i  $\mathbb{R}^n$  är ortogonala
- bevisa Pythagoras sats i  $\mathbb{R}^n$ .
- förklara vad som menas med  $W^\perp$  om  $W$  är ett underrum i  $\mathbb{R}^n$
- tillämpa sats 6.1.3 vid problemlösning.
- bevisa sats 6.2.4.
- förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum  $W$  och tillämpa sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor  $\mathbf{y} \in W$  relativt en ortogonal bas för  $W$ .
- använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning
- förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum  $W$ .

- förklara vad som menas med en ortogonal matris.
- tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum  $W$  i  $\mathbb{R}^n$  utgående från en annan bas för  $W$ .
- förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning och tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
- förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ .

### Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
L.6.1	1, 5, 11
L.6.2	1, 7, 11, 13
L.6.3.	1, 3, 7, <b>11</b>
L.6.4.	1, <b>9</b>
L.6.5	1, 3, 5, 7, 9
L.6.6	1, <b>3</b> , 9

”**Tjocka**” uppgifter skall räknas på tavlan.