TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 13
Vecko–PM läsvecka 7

Adams: 16.1-16.3

Innehåll: Gradient, divergens, rotation, Greens sats/formel.

Kapitel 16 handlar om några viktiga differentialoperatorer på vektorfält; **div** (*divergensen*) och **curl** (*rotationen*). Även nabla-operatorn $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ som vi stötte på redan i kapitel 12 spelar en viktig roll. Tyvärr hinner vi inte med hela kapitel. Det är bara avsnitt 16.3 som skall diskuteras noggrant. Men låt mig ändå sammanfatta vad kapitel 16 innehåller. Avsnitt 16.1 handlar mycket om vilken information som $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ och $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ ger om ett vektorfält $\mathbf{F}$. Man kan säga att $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x, y, z)$ ger uttryck för hur mycket vektorfältet verkar ut från (eller in mot) punkten $P = (x, y, z)$. Om vektorfältet representerar ett flöde så kan man tänka på $\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x, y, z)$ som *källstyrkan* i punkten P dvs. hur mycket av flödet (t.ex. gas, radioaktivitet eller dyl) som "skapas/produceras" i punkten. Antag t.ex. att vi studerar flödet genom en sluten yta (t.ex. en sfär). Om det flödar mer ut ur området (som ytan begränsar) än in så måste det ju på något sätt produceras/skapas flöde inuti området dvs. finnas punkter där $\mathbf{div}\,\mathbf{F} > 0$. Om det inte sker någon källproduktion alls dvs. om $\mathbf{div}\,\mathbf{F} \equiv 0$ så sägs vektorfältet vara *källfritt*. Den andra viktiga operationen $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ i detta kapitel ger istället uttryck för vektorfältets tendens att virvla/rotera i en omgivning av P. Till skillnad mot $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ (som ger ett värde) så ger $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ en vektor i varje punkt. Riktningen på vektorn anger den axel kring vilket vektorfältet roterar mest. Om $\mathbf{curl}\,\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ så sägs vektorfältet vara *virvelfritt* (se anteckningar från föra veckan).

Avsnitt 16.2 innehåller en del räknelagar för ovanstående differentialoperatorer samt några resultat som knyter an till vad vi delvis jobbade med i kapitel 15. Bl.a. är det så att om ett vektorfält är virvelfritt i ett enkelt sammanhängande område så är det också konservativt där.

Avsnitten 16.3-5 handlar om tre viktiga satser (Greens, Gauss's resp Stokes sats) som har stort teoretiskt intresse och är av central betydelse inom många områden/tillämpningar, inte minst för att analysera och lösa partiella differentialekvationer. Det huvudsakliga innehållet i satserna beskrivs av formler som knyter samman mycket av det vi arbetat med under del 2 av kursen;

$$\oint_{\partial D} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \qquad (Greens\ formel)$$

$$\iiint_K \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dV = \oiint_{\partial K} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad (Gauss's\ formel)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{curl}\,\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS \qquad (Stokes's\ formel)$$

Mål: Du skall kunna

- tillämpa sats 16.2.4.
- formulera och tillämpa Greens formel (16.3.6)

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
A.16.3	1, 2, 3, 5