

KURVINTEGRALER

Låt $f(x, y, z)$ vara en kontinuerlig funktion och låt $\mathcal{C}: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in [a, b]$, vara en glatt kurva i rummet (t.ex. $\mathbf{r}'(t)$ är kontinuerlig och $\neq 0$ för alla t).

Med *kurvintegralen* av $f(x, y, z)$ över (eller längs) kurva \mathcal{C} menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Om \mathcal{C} är styckvis glatt kurva dvs består av bitar $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ "hopklustrade" vid ändpunkterna och som var och en är glatta kurvor, så definierar man kurvintegralen som summan

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} f(x, y, z) ds.$$

Vet att längden av \mathcal{C} ges av

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Låt \mathbf{F} vara ett kontinuerligt vektorfält i planet: $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D (enöppen mängd). Om \mathcal{C} är en orienterad glatt kurva i D med parameterframställningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$ så kallas uttrycket

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

för *kurvintegralen av fältet \mathbf{F} längs kurvan \mathcal{C}* .

Den betecknas $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ eller $\int_{\mathcal{C}} f dx + g dy$. I det senare fallet talar vi också om *kurvintegralen av differentialformen $f dx + g dy$* .

Om \mathcal{C} är styckvis glattkurva med glatta bitar $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ definieras kurvintegralen som

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Om kurvan \mathcal{C} är sluten kallas ofta kurvintegralen för cirkulationen av \mathbf{F} runt \mathcal{C} och betecknas $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Vi har $\mathbf{r}'(t) dt = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \hat{\mathbf{T}} ds$, där $\hat{\mathbf{T}}$ är enhetstangenten till kurvan, $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ är båglängdselementet. Vi har alltså

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds.$$

Den fysikaliska tolkningen av kurvintegralen är det arbete fältet utför (dvs den energi som fältet tillför en partikel) för att förflytta partikeln längs kurvan.

Sats 15.4.1 Låt D vara ett öppet sammanhängande område och låt F vara ett glatt vektorfält definierat på D . Då är följande tre utsagor ekvivalenta:

- F är konservativt i D .
- $\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten styckvis glatt kurva C i D .
- Om C_1 och C_2 är två styckvis glatta kurvor i D med gemensamma start- och slutpunkter så är

$$\int_{C_1} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Om F är konservativt med potential ϕ och C är en styckvis glatt kurva med startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

Sats 16.3.6 (GREENS FORMEL) Låt D vara ett kompakt område i planet vars rand C består av en eller flera styckvis glatta enkla slutna kurvor positivt orienterade relativt D (dvs området D ligger till *vänster* om kurvan). Antag också att $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ är ett glatt vektorfält i öppen mängd Ω som innehåller D . Då gäller

$$\oint_C F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

Area som kurvintegral

Antag att C är den positivt orienterade randen till D . Då gäller

$$\oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \text{Arean av } D.$$