ORTOGONALITET. ORTOGONALPROJEKTION

En mängd av vektorer kallas en **ortogonalmängd**, om vektorerna i mängden är parvis ortogonala.

En mängd av vektorer kallas en **ortonormerad** mängd eller en **ON-mängd**, om den är en ortogonalmängd, vars samtliga vektorer är normerade.

En ortogonalmängd som är en bas för ett linjärt rum, kallas en **ortogonalbas**. Om basen är en ON-mängd, kallas den en **ON-bas**.

Ex.1 Med $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ har vi att $u_1 \cdot u_2 = 0$, $u_1 \cdot u_3 = 0$ och $u_2 \cdot u_3 = 0$. $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ är således en ortogonal mängd och alltså, enligt sats 4, en ortogonal bas för $H = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

$||u_1|| = \sqrt{6}$, $||u_2|| = \sqrt{9} = 3$, $||u_3|| = \sqrt{21}$.

$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{6}}u_1, \frac{1}{3}u_2, \frac{1}{\sqrt{21}}u_3\}$ är en ON-bas för H.

Sats 5. Låt $\mathcal{B} = \{u_1 \ldots, u_p\}$ vara en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$. Låt y vara en vektor i W.

Koordinaterna för y relativ basen $\mathcal{B}$, $[y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ ges då av

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$$

Om $\mathcal{B}$ är en ortonormerad bas ges koordinaterna av

$$c_j = y \cdot u_j$$

Bevis. Varje vektor y i W är en linjärkombination av $u_1, \ldots, u_p$, så att

$$y = c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p \tag{1}$$

för vissa tal $c_1, \ldots, c_p$. Multiplicera (1) skalärt med u_j, $1 \leq j \leq p$, så fås

$$y \cdot u_j = \sum_{i=1}^{p} c_i u_i \cdot u_j = c_j u_j \cdot u_j$$

varav

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}.$$

Om $\mathcal{B}$ är en ON-bas, så är $u_j \cdot u_j = 1$ och $c_j = y \cdot u_j$.

Ex.2. Låt S, $\mathcal{B}$ och H vara enligt föregåene exempel och låt $y = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Man kan visa att $y \in H$ (Hur?).

Nu har vi att $y \cdot u_1 = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 12$, $y \cdot u_2 = 27$, $y \cdot u_3 = 21$. Enligt satsen är

$$[y]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

där $c_1 = \frac{12}{6} = 2$, $c_2 = \frac{27}{9} = 3$, $c_3 = \frac{21}{21} = 1$.

Sats 11. Gram-Schmidt ortogonaliseringsprocedur. Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Då har W en ON-bas. Låt $\{u_1, \ldots, u_p\}$ vara en bas för W. Sätt

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\
&\vdots \\
v_p &= u_p - \frac{u_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \ldots - \frac{u_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1}
\end{aligned}$$

Då är $\{v_1 \ldots, v_p\}$ en ortogonal bas för W och $\{v_1/||v_1|| \ldots, v_p/||v_p||\}$ är en ON-bas. Dessutom gäller att

$$\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{Span}\{u_1, \ldots, u_k\} \text{ för } 1 \leq k \leq p$$

Ortogonalprojektion

I många sammanhang har man ett underrum U av $\mathbb{R}^n$, och man vill kunna dela upp en given vektor $u \in \mathbb{R}^n$ som $u = u' + u''$, där $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$.

Låt $y \neq 0$ vara en given vektor i $\mathbb{R}^n$ och $U = \text{Span}\{y\}$. $u' \in U$ omm $u' = \lambda y$ får något λ. För $u \in \mathbb{R}^n$ existerar ett entydigt $u' \in U$ så att $u - u' = u'' \in U^\perp$. Denna ges av

$$u' = \left(\frac{u \cdot y}{y \cdot y}\right) y \text{ och } u'' = u - u'$$

Notera att u' är parallell med linjen U genom origo med riktningsvektor y. Därför är u' en projektion av u på U. Man använder ibland beteckningen $\text{proj}_y u$ eller $\text{proj}_U u$ för projektionen.

Bevis. En enkel kalkyl ger att

$$u'' \cdot y = (u - u') \cdot y = u \cdot y - \left(\frac{u \cdot y}{y \cdot y}\right) y \cdot y = 0$$

Sats 8. Satsen om ortogonal uppdelning. Låt W vara ett underrum. Då kan varje vektor i $u \in \mathbb{R}^n$ skrivas , på exakt ett sätt, som en summa

$$u = u' + u''$$

där u' är en vektor i W och z är en vektor i $W^\perp$. Vektorn u' kallas projektionen av u på W och betecknas även $\text{proj}_W u$. Om $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är en ortogonal bas för W så beräknas vektorn u' med projektionsformeln

$$u' = \frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \ldots + \frac{u \cdot v_p}{v_p \cdot v_p} v_p \text{ och } u'' = u - u'$$

Sats 9. Satsen om bästa approximation. Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och u en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^n$. Lå u' vara projektionen av u på W. Då är u' den punkt i W som ligger närmast u. Med andra ord gäller att

$$||u - u'|| < ||u - v||$$

för alla v i W med $v \neq u'$.

Det minsta avståndet från $u \in \mathbb{R}^n$ till underrumet W är alltså avståndet mellan u och $\text{proj}_W u$.

Sats 6. En $m \times n$-matris U har ortonormerade kolonner om och endast om $U^T U = I$.

Def. En kvadratisk matris U kallas **ortogonal** om $U^{-1} = U^T$.

Sats 6'. En $n \times n$-matris är ortogonal omm den har ortonormerade kolonner ($\Leftrightarrow$ kolonner bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^n$).

Sats 7. Låt U vara en $m \times n$-matris med ortonormerade kolonner och låt x och y vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då gäller:

- a. $||Ux|| = ||x||$
- b. $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
- c. $(Ux) \cdot (Uy) = 0$ omm $x \cdot y = 0$.

Satsen innebär att om en avbildningsmatris U har ortonormerade kolonner så bevaras både längd och vinklar mellan vektorer.

Def. Om A är en $m \times n$-matris och $b \in \mathbb{R}^n$ så är en **minstakvadrat-lösning** till ekvationen $Ax = b$ en vektor $x' \in \mathbb{R}^n$ sådan att

$$||Ax' - b|| \leq ||Ax - b|| \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Minstakvadrat felet är $||Ax' - b||$ då x' är minstakvadrat-lösningen. Ofta använder man istället *kvadratiska medelfelet* som är $||Ax' - b||/\sqrt{n}$, där n är anatalet ekvationer i systemet.

Sats 13. Minstakvadrat-lösningarna till ekvationen $Ax = b$ är samma som lösningarna till den (konsistenta) normaliserade ekvationen

$$A^T A x = A^T b$$