DIAGONALISERING AV SYMMETRISKA MATRISER

Med en symmetrisk (reell) matris menas en matris A sådan att $A^T = A$. ObS! En symmetrisk matris är alltid kvadratisk.

Sats 3. Spektral satsen för reella symmetriska matriser.
Låt A vara en reell, symmetrisk, $n \times n$-matris. Då gäller:

1. A har n reella egenvärden om man räknar multiplicitet.
2. För varje egenvärde är egenrummets dimmension samma som egenvärdets multiplicitet som rot till karakteristiska ekvationen.
3. Egenrummen är parvis ortogonala, dvs egenvektorer som svarar olika egenvärden är ortogonala.
4. A kan diagonaliseras med en ortogonal matris.

Om $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ är en ON-bas av egenvektorer till den symmetriska matrisen A och $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$ är motsvarande egenvärden så är

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Detta kalls en spektral uppdelning av A.

Observera att varje $u_j u_j^T$ är en projektionmatris på $U_j = \text{Span}\,\{u_j\}$, dvs $u_j u_j^T x = \text{proj}_{U_j} x$ för varje x i $\mathbb{R}^n$.
