DIAGONALISERING

Def. En $n \times n$-matris sägs vara diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

Beräkning av matrispotenser.
Låt A vara $n \times n$-matris och $k \in \mathbb{N}$. Med A^k menas produkten

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ ggr}}.$$

Om D är en diagonalmatris, i.e.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ så är } D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Om A är diagonaliserbar, i.e. $A = PDP^{-1}$ med D som diagonalmatris så blir

$$A^k = \underbrace{(PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1})}_{k \text{ ggr}} = P \underbrace{D \cdot D \cdot \ldots \cdot D}_{k \text{ ggr}} P^{-1} = PD^kP^{-1}$$

Sats 5.3.5. En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.
$A = PDP^{-1}$, eller $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris,

$$\Leftrightarrow$$

kolonnerna i P är n linjärt oberoede egenvektorer till A.
I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorerna i P).

Bevis. Vi observerar först att om P är en $n \times n$-matris med kolonner $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ och om D är en diagonalmatris med diagonalelement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ så

$$AP = A[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1 \ldots A\mathbf{v}_n] \tag{1}$$

medan

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] \tag{2}$$

Antag att A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$. Då $AP = PDP^{-1}P = PD$. (1) och (2) ger

$$[A\mathbf{v}_1 A\mathbf{v}_2 \ldots A\mathbf{v}_n] = [\lambda\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] \tag{3}$$

och

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n \tag{4}$$

Eftersom P är inveterbar måste kolonnerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vara linjärt oberoende. Vi har alltså visat "endast om" delen, dvs A är diagonaliserbar $\Rightarrow$ A har n linjärt oberoende egenvektorer.

Antag nu att A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ som svarar egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. För $P = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n]$ och $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ får vi enligt (1)-(3) att $AP = PD$. Vidare, eftersom P är inverterbar (kolonnerna i P är linjärt oberoende) är

$$A = PDP^{-1}.$$

Ex.1 Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

Sats 5.3.6. Om $n \times n$-matrisen A har olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Bevis. Följer ur sats 2 och sats 5 (kapitel 5).

Sats 5.3.7. Låt A vara $n \times n$-matris med p ($p \leq n$) olika egenvärden $\lambda_1 \dots \lambda_p$.

(a) Dimensionen av egenrummet till egenvärdet λ_k, $1 \leq k \leq p$, är mindre eller lika med ordningen av λ_k som nollställe till det karakteristiska polynomet.

(b) A är diagonaliserbar omm för varje λ_k är dimensionen av egenrummet till λ_k lika med ordningen av λ_k som nollställe till det karakteristiska polynomet.

(c) Om A är diagonaliserbar och $\mathcal{B}_k$ är en bas för egenrummet till λ_k blir $\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_p$ en egenvektorsbas i $\mathbb{R}^n$.

Ex.2 Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ är inte diagonaliserbar. **Visa!**