GRADIENT OCH RIKTNINGSDERIVATA

Gradient till en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som har partiella derivator är

$$\nabla f(x,y) = \text{grad} f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}.$$

Sats 12.7.6 Om f är differentierbar i punkten (a,b) och $\nabla f(a,b) \neq 0$ så är $\nabla f(a,b)$ en normalvektor till nivåkurvan genom punkten (a,b) alltså till $f(x,y) = f(a,b)$.

Riktningsderivatan till $f(x,y)$ i punkten (a,b) i riktningen $\mathbf{u} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}$, där $||\mathbf{u}|| = 1$ är gränsvärdet

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = f'_{\mathbf{u}}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu, b+hv) - f(a,b)}{h}.$$

Observera att $f'_{\mathbf{u}} = f'_x$ om $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ och $f'_{\mathbf{u}} = f'_y$ om $\mathbf{u} = \mathbf{j}$
$D_{\mathbf{u}} f(a,b)$ är tillväxthastigheten i riktiningen $\mathbf{u}$,

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv)|_{t=0}.$$

Sats 12.7.7 Om f är differentierbar och $\mathbf{u} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}$ är en given riktning med $||\mathbf{u}|| = 1$ så är

$$f'_{\mathbf{u}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}.$$

Notera att $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = ||\mathbf{u}||||\nabla f(a,b)|| \cos\theta$, där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\nabla f(a,b)$. Då gäller

- I punkten (a,b) växer f snabbast i riktningen som ges av $\nabla f(a,b)$ (då $\cos\theta = 1$). Den maximala tillväxten är $||\nabla f(a,b)||$.
- I punkten (a,b) avtar f snabbast i riktningen som ges av $-\nabla f(a,b)$ (då $\cos\theta = -1$). Den maximala nedgångshastighet är $||\nabla f(a,b)||$.
- Tillväxthastigheten i punkten (a,b) är 0 i riktningar parallella med nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b)$ $(\cos\theta = 0)$.

PARTIELLA DERIVATOR AV HÖGRE ORDNING

Om de partiella derivatorna av $z = f(x,y)$ är partielltderiverbara så kan vi definiera

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x,y) = f''_{xx}(x,y) = f_{11}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f_{21}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f_{12}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x,y) = f''_{yy}(x,y) = f_{22}(x,y)$$

Vi kan uppreppa processen till högre ordningens derivator.

Sats 12.4.1 Om alla partiella derivator av ordning till och med k är kontinuerliga (skriver $f \in C^k$) i D (D är öppen) så spelar det ingen roll i vilken ordning deriveringsregelrna utförs, resultatet blir detsamma, som t.ex. är

$$f_{12} = f_{21} \text{ om } f \in C^2,$$

$$f_{1112} = f_{1121} = f_{1211} = f_{2111} \text{ om } f \in C^4.$$

KEDJEREGELN

Om $z = f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator och om $x = x(t)$, $y = y(t)$ är deriverbara funktioner så gäller

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Alternativt skrivsätt

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t).$$

Om $z = f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator och om $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ har partiella derivator så gäller

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Kedjeregeln på matrisform är

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

DIFFERENTIERBARHET

Med **linjärisering** av f i punkten (a, b) menas fnktionen

$$L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Grafen till linjäriseringen av f i punkten (a, b) är tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

En funktion f kallas **differentierbar** om det finns konstanter A_1, A_2 sådana att

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k),$$

där $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$. I detta fall blir f partiellt derivarbar i (a, b) och $A_1 = f_1(a, b)$, $A_2 = f_2(a, b)$.

Talet $\sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k)$ är fellet som uppstår då f ersätts med linjäriseringen L. Om f är differentierbar blir fellet litet i jämförelse med $\sqrt{h^2 + k^2}$.

Sats 12.6.4. Om f_1, f_2 är kontinuerliga i en omgivning till (a, b) så är f differentierbar.

Sats 12.6.5. Låt $z = f(x, y)$, där $x = u(s, t)$ och $y = v(s, t)$. Antag att

- u och v har partiella derivator i punkten (a, b)
- f är differentierbar i punkten $(u(a, b), v(a, b))$.

Då har $z = w(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ partiella derivator av ordning ett med avseende på s och t i punkten (a, b) och

$$w_1(a, b) = f_1(u(a, b), v(a, b))u_1(a, b) + f_2(u(a, b), v(a, b))v_1(a, b)$$
$$w_2(a, b) = f_1(u(a, b), v(a, b))u_2(a, b) + f_2(u(a, b), v(a, b))v_2(a, b)$$

dvs

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Bevis. Vi ska bevisa kedjeregeln i fallet då $z = w(t) = f(u(t), v(t))$. Då säger den att

$$\frac{dz}{dt}|_{t=a} = f_1(u(a), v(a))u'(a) + f_2(u(a), v(a))v'(a)$$

om u och v är deriverbara i punkten a och f är differentierbar i punkten $(u(a), v(a))$.
Vi skall undersöka gränsvärdet av kvoten

$$\frac{w(a + \sigma) - w(a)}{\sigma} = \frac{f(u(a + \sigma), v(b + \sigma)) - f(u(a), v(a))}{\sigma}$$

då $\sigma \to 0$.
Eftersom f är differentierbar gäller det att

$$f(u(a+\sigma), v(b+\sigma)) = f(u(a), v(a))+f_1(u(a), v(a))h+f_2(u(a), v(a))k+\sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k)$$

där $h = u(a + \sigma) - u(a)$, $k = v(a + \sigma) - v(a)$ och $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$.
Vi har alltså att

$$\begin{aligned}
&\frac{f(u(a + \sigma), v(b + \sigma)) - f(u(a), v(a))}{\sigma} \\
&= \frac{f_1(u(a), v(a))h + f_2(u(a), v(a))k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k)}{\sigma} \\
&= f_1(u(a), v(a))\frac{h}{\sigma} + f_2(u(a), v(a))\frac{k}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}\rho(h, k)
\end{aligned}$$

Eftersom u och v är deriverbara i a så blir de kontinuerliga i a och därmed $h = u(a+\sigma) - u(a) \to 0$ och $k = v(a+\sigma) - v(a) \to 0$ då $\sigma \to 0$.
Vidare har vi att $\rho(h, k) \to 0$ då $\sigma \to 0$ och

$$\frac{h}{\sigma} = \frac{u(a + \sigma) - u(a)}{\sigma} \to u'(a) \text{ och } \frac{k}{\sigma} = \frac{v(a + \sigma) - v(a)}{\sigma} \to v'(a)$$

då $\sigma \to 0$. Följaktligen går termen $\sqrt{\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}\rho(h, k)$ mot 0 och

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{f(u(a + \sigma), v(b + \sigma)) - f(u(a), v(a))}{\sigma} = f_1(u(a), v(a))u'(a)+f_2(u(a), v(a))v'(a).$$

Därför blir den sammansatta funktioner $f(u(t), v(t)$ deriverbar i a med derivatan $f_1(u(a), v(a))u'(a) + f_2(u(a), v(a))v'(a)$.

LINJÄRISERING OCH KEDJEREGELN FÖR VEKTORVÄRDA FUNKTIONER

En funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av m funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.
Om $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ där

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

så skriver vi $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.
Man samlar partiella derivatorna till $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ i en matris

$$D\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Denna matris kallas **Jacobimatrisen** till $\mathbf{f}$.
Speciellt blir Jacobimatrisen till en reellvärd funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lika med

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Om alla komponenterna $f_j(\mathbf{x})$ av $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ är differentierbara kan differensen $f_j(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_j(\mathbf{a})$ approximeras av

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{a})h_1 + \ldots \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\mathbf{a})h_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Om vi låter vektorn $\mathbf{h}$ vara en kolonnvektorn kan kolonnvektordifferensen $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ approximeras med $D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h}$, dvs

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h},$$

eller med $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Kedjeregeln:

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$