MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2013-01-17 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Dawan Mustafa

tel. 0703-088304

TMV036 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 11/12 inkluderas.)

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. (a) Skissa ytan (3p)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4z^2 = 4, 0 \leq y \leq 3\}.$$

(b) Låt z vara en funktion av två variabler sådan att $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} g\left(\frac{x}{y}\right)$, $x > 0$, $y > 0$, för någon differentierbar funktion g. Visa då att z uppfyller differentialekvationen $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$. (3p)

2. Låt $f(x, y) = xy \sin x$.

(a) I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(\pi/2, 1)$? (2p)

(b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(\pi/2, 1)$ i riktningen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}^T$ (2p)

(c) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkten på ytan där $x = \pi/2$ och $y = 1$. (2p)

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\int\int_D e^{y/x} dxdy$$

där D är området: $0 < x < 1$, $0 < y < x$.

(b) Beräkna volymen av kroppen K: $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq xy + 3$. (3p)

4. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

5. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdena -2, och 2. Bestäm A:s egenvektorer samt projektionen av vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ på egenrummet till egenvärdet -2. (6p)

Var god vänd!

6. (a) Formulera Greens formel. (2p)

(b) Rita i grova drag med angivande av orientering kurvan (2p)

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t(1-t^2) \end{cases} \qquad -1 \leq t \leq 1.$$

(c) Beräkna arean av det området kurvan i (a) omslutar. (3p)

7. Avgör om följande ekvationssytem har någon lösning: (6p)

$$\begin{cases} x^3 + 3x + y^3 + 3y = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Tips: Undersök största och minsta värde av funktionen $x^3 + 3x + y^3 + 3y$ under bivillkoret $2x^2 + 2y^2 = 1$.

8. (a) Bevisa följande Pythagoras sats: Om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ är parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^m$ så (3p)

$$||\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \ldots + \mathbf{u}_n||^2 = ||\mathbf{u}_1||^2 + ||\mathbf{u}_2||^2 + \ldots + ||\mathbf{u}_n||^2.$$

Det blir poängavdrag om du skriver ner beviset bara i fall $n = 2$.

(b) Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ är en ortonormerad mängd av vektorer i $\mathbb{R}^m$. Visa att om $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ så (4p)

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \ldots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)^2 \leq ||\mathbf{a}||^2$$

med likheten om och endast om $m = n$. Motivera väl.

Lycka till!
Lyudmila T