

TMV036/MVE350 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt KI, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 12/13 inkluderas.)

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

1. (a) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ange respektive (2p)
egenvärdet.

- (b) Lös följande ekvationssystem med minstakvadrat-metoden (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (c) En partikels position i xy -planet vid en tidpunkt t ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, (2p)
 $-1 \leq t \leq 1$. Ange partikels fart vid varje tidpunkt t under detta tidsintervall.
När har partikeln lägst fart?

- (d) Hitta arean av parametriserade ytan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u + v^2)$, $-1 \leq u \leq 1$, (3p)
 $0 \leq v \leq 2$. Bra att veta: $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$.

2. Låt $f(x, y) = x^3y \sin(\pi xy)$.

- (a) I vilken riktning växer funktionen $f(x, y)$ snabbast när vi står i punkten $(1, 1/2)$? (2p)

- (b) Ange tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkten på ytan där $x = 1$ och (2p)
 $y = 1/2$.

- (c) Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $f(x, y) = 1/2$ i punkten $(1, 1/2)$. (2p)

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

där D är det område som avgränsas av x -axeln och de två kurvorna $y = x^2$
och $y = 2 - x$ för $x \geq 0$.

- (b) Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\iiint_K (x^2 + y + z^2) dV$$

där $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$.

Var god vänd!

4. Vi har en 1 meter lång ståltråd som ska delas i maximalt tre bitar. Varje bit ska sedan böjas ihop till en kvadrat. Vilken är den största och den minsta sammanlagda area som dessa kvadrater kan ha? (6p)

5. Låt U vara det underrum som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en ortogonal bas för U . (3p)
- (b) Ange en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som ligger i det ortogonala komplementet U^\perp . Vad är den ortogonala projektionen av din vektor \mathbf{v} på U ? (2p)

6. (a) Vilket av följande vektorfält är konservativt i \mathbb{R}^2 ? Hitta en potential för det konservativa vektorfältet: (3p)

$$(a) \mathbf{F}_1(x, y) = (2xy + 2x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} \quad (b) \mathbf{F}_2(x, y) = 2xe^y\mathbf{i} + (x^2e^y + x)\mathbf{j}.$$

Motivera Ditt svar.

- (b) Räkna ut integralen (3p)

$$\oint_C \mathbf{F}_2(x, y) dr$$

där C är cirkeln med centrum i $(1, 1)$ och radien 1.

7. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F} = \nabla\phi$, där $\phi(x, y) = x^2y$. Skissa också på några fältlinjerna tillsammans med några pilar som illustrerar vektorfältet \mathbf{F} samt några nivåkurvor till ϕ . Vad finns det för samband mellan fältlinjerna och vektorfältspilarna? (6p)

8. (a) Låt A vara en 2×2 matris med två olika egenvärde och låt \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 vara egenvektorer till matrisen som svarar mot de två olika egenvärdena. Visa att \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är linjärt oberoende. Du skall inte använda en sats som handlar om denna egenskap hos egenvektorer men istället bevisa påståendet i det givna speciella fallet. Det blir poäng avdrag om du skriver ner beviset i det allmänna fallet. (3p)

- (b) Låt A vara en 3×3 diagonaliserbar matris med egenvärdena 1, 2 och 3. Låt S vara en 3×3 inverterbar matris. Visa att matrisen $B = S^{-1}AS$ är diagonaliserbar och bestäm alla B :s egenvärde. Motivera väl Ditt svar. (2p)

Lycka till!
Lyudmila T