TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 14
Vecko–PM läsvecka 2

Lay: 6.1-6.6, 7.1

Innehåll: Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden, spektralsatsen.
I kapitel **6.1** införs *skalärprodukt, dot product* och *längd*, eller *norm* som kanske är ett bättre namn. Dessa motsvarar skalärprodukt och längd för geometriska vektorer då vektorerna ges i en ON-bas. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. Ortogonala komplementet till ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är ett begrepp som generaliserar normalen till ett plan genom origo.

I avsnitt **6.2** är begreppet ON-bas, ortonormerad bas, viktigt. **Sats 4** säger att ortogonalitet garanterar linjärt oberoende. Sats 5 visar hur lätt det är att bestämma koordinater i en ortogonal bas. Ännu enklare är det i en ON-bas, då är $x_k = \mathbf{x} \cdot e_k$

Projektionsformeln, som ger projektionen av en vektor på en annan,är samma somi inledande kursen. Motiveringen till formeln måste vara algebraisk eftersom vi inte har några vinklar i $\mathbb{R}^n$. Vi använde projektionsformeln i inledande kursen för att dela upp en vektor i två ortogonala komposanter, den ena med en given riktning och den andra i planet ortogonalt mot denna riktning. En vidareutveckling av denna idé kommer i sats 8 och sats 10 i **6.3**. Begreppet ortogonala matriser som nämns i förbigående i 6.2 kommer att användas mycket i kapitel 7.

I **6.4** ges Gram-Schmidt processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W. Metoden är enkel, det gäller att i varje steg använda projektionsformeln för att ersätta en vektor i basen med en som är ortogonal mot de redan bestämda vektorerna i den sökta ortogonala basen.

I avsnitt **6.5** ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning.* I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna lösning till ekvationen `Ax = b` av `x=A\b`.
Sats 13 ger metoden i en liten ask. Däremot har man inte direkt nytta av sats 14, det viktiga är att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 13 entydig lösning.
I kapitel **7.1** studeras diagonalisering av reella symmetriska matriser, alltså matriser som uppfyller att $A^T = A$. Väldigt många tillämpningar leder till symmetriska matriser så resultaten i kapitlet är mycket användbara. I avsnittet ges två mycket viktiga satser. Dels sats 2, som säger att de reella symmetriska matriserna, och inga andra, alltid kan diagonaliseras med en ortogonal matris. *Spektralsatsen*, sats 3, beskriver situationen mer i detalj och ger hjälp vid problemlösning. Bevisen av satserna i kapitlet ryms inte i kursen. Utöver att man nu väljer en ortonormerad bas av egenvektorer är det ingen väsentlig skillnad på diagonalisering av symmetriska matriser och osymmetriska som behandlades i kapitel 5.3.

Mål: Du skall kunna

- beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räknereglerna för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
- avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
- bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
- förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$

- tillämpa sats 6.1.3 vid problemlösning.
- bevisa sats 6.2.4.
- förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum W och tillämpa sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\boldsymbol{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W.
- använda projektionsformeln 6.2.(2) i problemlösning
- förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum W.
- förklara vad som menas med en ortogonal matris.
- tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$ utgående från en annan bas för W.
- förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning och tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
- förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^T A\boldsymbol{x} = A^T \boldsymbol{b}$.
- tillämpa satserna 1 – 3 i kapitel 7.1 vid problemlösning. Spektralsatsen (sats 3) är extra viktig.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
L.6.1	1, 5, 11
L.6.2	1, 7, **9**, 11, 13
L.6.3.	1, 3, 7, **11**
L.6.4.	1, **9**
L.6.5	1, 3, 5, 7, 9
L.6.6	1, **3**, 9
L.7.1	1, 4, 15, **17**

Extra 1. Låt $W = Span\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T\}$. Bestäm det ortogonala komplementet $W^\perp$.

2. Låt W vara det tredimensionella underrum i $\mathbb{R}^5$ som genereras av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet.

”Tjocka” uppgifter skall räknas på tavlan.