TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 14
Vecko–PM läsvecka 4

Adams: 12.4, 12.5, 12.6, 12.7, 13.1, 13.2

Innehåll: Högre ordningens derivator, Kedjeregeln, linjär approximation, differentierbarhet. Extremvärden, extremvärde med bivillkor. Lagranges multiplikator metod.
Kapitel 12 handlar om funktioner av flera variabler. I veckans avsnitt skall vi arbeta med en del begrepp som är välkända från envariableanalysen men nu i en mer generell tappning. I huvudsak handlar det om att derivera funktioner av flera variabler och använda derivata för att på olika sätt beskriva och approximera sådana funktioner. Derivatan av en reellvärd funktion $f(x)$ av en variabel i en punkt x_0 mäter hur "snabbt/långsamt" funktionsvärdena förändras i en omgivning av x_0 och man vill att derivatan skall ha samma betydelse även för funktioner $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ av flera variabler. Det är dock inte givet hur man skall mäta denna förändring eftersom vi i omgivning av en punkt i $\mathbb{R}^n$ har oändligt många riktingar att ta hänsyn till. De *partiella derivatorna* mäter förändringshastigheten i axelparallella riktingar och med dessa, samlade i en vektor som kallas *gradienten*, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktingar genom s.k. *riktningsderivata*. I många situationer behöver man kunna hantera sammansättningar av funktioner, t.ex. vid variabelbyten, och för att derivera sådana sammansättningar finns en *kedjeregel*, liknande den för funktioner av en variabel. Första ordningens derivator innehåller värdefull information om en funktions beteende och med dess hjälp kommer vi bl.a. beräkna approximativa funktionsvärden, genom *linjäriseringen* eller *differentialen*, och bestämma *tangentplan* till funktionsytor och nivåytor. Vi kommer införa begreppet *differentierbar* vilket är den naturliga motsvarigheten till deriverbarhet för funktioner av en variabel.Vi skall även studera högre ordningens derivator.
Kapitel 13 handlar om tillämpningar av derivata. Framför allt kommer vi se på hur derivata kan användas för att lösa olika typer av optimeringsproblem, som beskrivs med funktioner av flera variabler. I avsnitt 13.1 ges tillräckliga villkor för existensen av extremvärden (max/min) och där beskrivs också var man skall leta för att finna dessa extremvärden. Lokala extremvärden kan t.ex. finnas i s.k. *stationära punkter*, där de partiella derivatorna är 0. Ofta kan man avgöra om en sådan stationär punkt är lokalt maximum eller minimum genom att studera funktionens andraderivator. I avsnittet finns enkla kriterier för att avgöra detta. I avsnitt 13.2 och 13.3 skall vi gå vidare och se på hur man kan hitta ev. *globala extrempunkter* dvs. det största och minsta värde som en funktion antar på ett givet område Ω. Sådana extremvärden behöver inte alltid existera men från Sats 13.1.2 vet vi att ett största och minsta värde alltid går att finna om området Ω är kompakt (dvs. slutet och begränsat). I sådana fall antar funktionen sitt största/minsta värde antingen i det inre av området eller på randen av området. Typiska kandidater på extrempunkter i det inre av området är de stationära punkterna, vilket vi redan tränat oss på att ta fram i avsnitt 13.1. Det nya, och ibland lite svårare problemet, är att bestämma extremvärdena på randen. Området kan begränsas av flera olika randbitar som var och en beskrivs en någon ekvation. Vi behöver alltså kunna bestämma största och minsta värde av en funktion (en s.k. målfunktion) under något bivillkor. För detta finns lite olika tekniker/metoder. Ibland kan man lösa ut en variabel (eller uttryck) ur bivillkoret och ersätta motsvarande uttryck i målfunktionen och ibland kan man parametrisera randen och ersätta variablerna i målfunktionen med motsvarande parametruttryck. I båda fallen (som studeras i avsnitt 13.2) kommer målfunktionen att bero på en variabel mindre och problemet reduceras till ett extremvärdesproblem av den typ vi studerade i avsnitt 13.1.

Mål: Du skall kunna

- beräkna gradienter och riktningsderivator
- bestämma ekvationer för tangentlinje och normallinje till nivåkurva (se sats A:12.7.6)
- beräkna partiella derivator av högre ordning genom att tillämpa deriveringsregler för funktioner av en variabel samt kedjeregeln (12.4, 12.5)
- beräkna linjärisering för en reellvärd funktion och utnyttja dessa till approximativ beräkning av funktionsvärden (12.6)
- definiera begreppet differentierbar funktion (12.6)
- redogöra för relationerna mellan egenskaperna för en funktion: kontinuerlig, kontinuerliga partiella derivator samt differentierbar (12.6)
- formulera och **bevisa** kedjeregeln för $f \circ g$ då $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt formulera kedjeregeln på matrisform för vektorvärda funktioner (12.5, 12.6)
- beräkna Jacobimatrisen för en vektorvärd funktion och utnyttja denna till approximativ beräkning av funktionsvärden (12.6)
- definiera begreppen lokalt minimum/maximum, sadelpunkt, globalt maximum/minimum, kritisk punkt och singulär punkt (13.1)
- bestämma kritiska/stationära punkter för $f(x, y)$ samt klassificera de kritiska punkterna med hjälp av sats 13.1.3 eller remark s.748 (13.1)
- tillämpa sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för $f(x, y)$ samt största och minsta värde på randen.(13.1, 13.2)
- tillämpa sats 13.1.1 för att bestämma största och minsta värde på kompakt mängd för $f(x, y)$ samt största och minsta värde på randen (13.2)

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
A.12.7	1, 3, 5, **21**
A.12.4	1, 3, 5, 10, 17
A.12.5	1, 6, 7, 9, 11, 15, **17**, 19
A.12.6	1, 3, 20
A.13.1	1, 3, 7, **9**, 13, **22**
A.13.2	**1**, **3**, 5, 7, 11

”Tjocka” uppgifter skall räknas på tavlan.