TRIPPELINTEGRALER

Vi definierar trippelintegraler genom att följa samma mönstret som för dubbelintegraller: vi definierar först trippelintegral av en funktion $f(x, y, z)$ på ett axelparallellt rätblock Δ med hjälp av Riemannsumman $R(f, P)$, där P är en indelning av Δ i axelparallella delblock; denna integral utvidgas sedan steg för steg tills man har integraller av formen

$$\iiint_D f(x, y, z) dV$$

med kontinuerlig $f(x, y, z)$ och relativt allmänt område $D \subset \mathbb{R}^3$.

Trippelintegraler över speciella område.

Om D är en axelparallell rätblock: $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$; så

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx,$$

(x, y, z får byta rollerna).

Om $D = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in E\}$, ($E$ är proektionen av D på xy-planet) α, β är kontinuerliga , så

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iint_E \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy,$$

(x, y, z får byta rollerna).

Om $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in E_x\}$, ($E_x$ är snittet mellan kroppen D och planet $x = konst$) så

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{E_x} f(x, y, z) dydz \right) dx,$$

(x, y, z får byta rollerna).

Variabelsubstitution

Antag att $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ är en $1 - 1$ avbildning av ett område E i uvw-rummet på område D i xyz-rummet. Antag att funktionerna $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ och deras partiella första ordningens derivator är kontinuerliga.
Om $f(x, y, z)$ är integrerbar på D så är

$$\begin{aligned} &\iiint_D f(x, y, z) dxdydz \\ &= \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw \end{aligned}$$

Sfärisk (rymdpolär) substitution

$$\begin{cases} x &= \rho \cos\theta \sin\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$dV = dxdydz = \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$