

VEKTORFÄLT

Ett **vektorfält** i planet är en funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}.$$

Vi uppfattar (x, y) som en punkt i planet och $\mathbf{F}(x, y)$ som en vektor i planet. För att åskadligöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i, y_i) och avsätter vektorerna $\mathbf{F}(x_i, y_i)$ i respektive punkter.

Fältlinjerna till ett vektorfält är kurvor vars tangenter är parallella med vektorfältets vektorer.

Alltså om (a, b) är en punkt i definitionsmängden till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ så blir en fältlinje genom denna punkt en kurva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ sådan att

- $(a, b) = \mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ för något t_0 ;
- i varje punkt $(x(t), y(t))$ på kurvan är kurv tangenten $x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ parallell med fältsvektorn $f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$ i denna punkt, dvs

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(t)f(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(t)g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Fältlinjerna är alltså lösningar till den differentialska ekvationen

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)}.$$

Ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D kallas **konservativt** om det finns en funktion $\phi(x, y)$ definierad på D sådan att

$$\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \text{ för alla } (x, y) \in D.$$

Funktionen $\phi(x, y)$ kallas **potential** till $\mathbf{F}(x, y)$.

Ett nödvändigt villkor för ett konservativt vektorfält i planet

Om $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ har kontinuerliga partiella derivator och är konservativt i D så måste gälla att

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}g(x, y) \quad (1)$$

i alla punkter $(x, y) \in D$.

Nivåkurvorna $\phi(x, y) = C$ kallas *ekvipotentialkurvor* till $\mathbf{F}(x, y)$. Eftersom $\nabla\phi(x_0, y_0)$ är en normalvektor till kurvan $\phi(x, y) = C$ genom (x_0, y_0) och lika med $\mathbf{F}(x_0, y_0)$ som är parallell med tangentvektorn till fältlinjen genom (x_0, y_0) , blir fältlinjerna ortogonala mot ekvipotentialkurvorna.

Ett vektorfält i rummet $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ med definitionsmängd D kallas **konservativt** om det finns en funktion $\phi(x, y, z)$ definierad på D sådan att

$$\nabla\phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \text{ för alla } (x, y, z) \in D.$$

Funktionen $\phi(x, y, z)$ kallas **potential** till $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Nivåytor $\phi(x, y, z) = C$ kallas *ekvipotentialytor*.

Ett nödvändigt villkor för ett konservativt vektorfält i rummet

Om $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ har kontinuerliga partiella derivator och är konservativt i D så måste gälla att

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}h(x, y, z) \end{cases} \quad (2)$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$.

Låt D vara ett öppet område i planet eller rummet. D kallas *sammanhängande* om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en kontinuerlig kurva som ligger helt i D .

Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.

En kurva för vilken begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller kallas *sluten*. Om en sluten kurva för övrigt inte skär själv kallas den *enkel*.

Sats 16.2.4 Om \mathbf{F} är glatt rotationsfritt vektorfält (dvs uppfyller (1) om det är ett vektorfält i planet eller (2) om \mathbf{F} är ett vektorfält i rummet) i ett **enkelt sammanhängande område** D så är \mathbf{F} konservativt.

Vi har alltså att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ i planet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

i alla punkter $(x, y) \in D$,

ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ i rummet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}g(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}h(x, y, z) \end{cases}$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$.