YTOR OCH YTINTEGRALER

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion $\mathbf{r}$ definierad på en rektangel $R = \{(u, v) : a \le u \le b, c \le v \le d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i uv-planet och med värden i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in R.$$

Notera att alla punkter på ytan är randpunkter eftersom ytan är ett "två-dimensionellt objekt" i $\mathbb{R}^3$. Punkter på ytan som motsvaras av inre punkter i området R kallas trots detta inre punkten på ytan. Randen till området R avbildas ibland på en kurva som avgränsar ytan. Den kurvan kallas i så fall för ytans rand.

En parametriserad yta är *glatt* om funktionen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ som ger parametriseringen är glatt och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \ne 0$ för alla s och t.

Tangentplanet till ytan i den punkt som har parametervärdena (s, t) spänns upp av vektorerna $\mathbf{r}'_s$ och $\mathbf{r}'_t$, $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$ är normalen till ytan.

Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, "hoppklistrade" längs randkurvor.

Låt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ vara en parameter framställning av en glatt yta $\mathcal{S}$ i rymden. Då är

$$dS = ||\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v||dudv$$

ett areaelement och arean av ytan $\mathcal{S}$ blir

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_R ||\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}||dudv.$$

Eftersom

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k}$$

blir arean

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \int\int_R \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} dudv.$$

Ytintegralen av en funktion $f(x, y, z)$ över ytan $\mathcal{S}$ definieras enligt

$$\int\int_{\mathcal{S}} f(x, y, z)dS = \int\int_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))||\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}||dudv.$$

ORIENTERADE YTOR OCH FLÖDESINTEGRALER

En yta $\mathcal{S}$ kallas *orienterbar* om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{N}(P)$ definierat kontinuerligt på $\mathcal{S}$ i varje punkt ortogonalt mot $\mathcal{S}$. Ett vektorfält som uppfyller detta kallas för *orientering* av $\mathcal{S}$.

Om $\mathcal{S}$ är en parametriserad glatt yta ($\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ i alla punkter på ytan) så ger

$$\hat{N} = \pm \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) / || \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} ||$$

de två möjliga parametriseringar.
Den sidan av ytan åt vilken normalvektorn $\hat{N}(P)$ pekar kallas för den positive sidan, den andra kallas för negativa sidan.

Lå $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ vara ett kontinuerligt vektorfält.
Vektorfältets flöde genom en orienterad yta $\mathcal{S}$ är integralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

För parametriserade ytor är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \pm \iint_R \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) dudv$$

det senare är lika med

$$\pm \iint_R f(x, y, z) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + g(x, y, z) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + h(x, y, z) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv$$

Val av tecken $\pm$ innebär ett val av riktning i vilken flödet uppfattas positivt.