GRADIENT, DIVERGENCE OCH ROTATION

Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Man kan tänka sig om linjär avbildning

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

som verkar på f.
Den kan verka även på ett vektorfält: om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så är

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \cdot (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Sats 16.1.1 Låt B_ϵ vara ett klott med radie ϵ och medelpunkt P och låt S_ϵ vara randen till B_ϵ. Då gäller enligt divergenssatsen (16.4.8):

$$\iiint_{B_\epsilon} \mathrm{div}\mathbf{F} dV = \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS,$$

där $\hat{N}$ är utåtriktad enhetsnormal till sfären S_ϵ och alltså

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int\int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

Ytintegralen kan ses som ”flödet ut ur punkten P”, $\mathrm{div}\mathbf{F}(P)$ kan tolkas som ”källstyrka per volymenhet”.

Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så definieras **rotation** $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ enligt

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \times (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sats 16.1.2 Låt S vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och enhets normalvektor $\hat{\mathbf{N}}$. Låt C vara randcirkeln genomlöpt motursssett från spetsen av $\hat{\mathbf{N}}$. Då gäller enligt Stokes sats (16.5.10)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dr = \int\int_C (\mathrm{curl}\mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS \approx (\mathrm{curl}\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\pi\epsilon^2$$

och alltså

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}(P) \cdot \hat{\mathbf{N}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot dr.$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan.

$\text{curl}\mathbf{F}(P)\cdot\hat{\mathbf{N}}$ kan alltså ses som fältets förmåga att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{\mathbf{N}}$, förmågan är störst om $\hat{\mathbf{N}}$ är parallell med $\text{curl}\mathbf{F}(P)$ och obefintlig om de är ortogonala.

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kallas **källfritt**, divergensfritt (”solenoidal”) i ett område D om $\text{div}\mathbf{F} = 0$ i D.

Ett vektorfält kallas **rotationsfritt** (”irrotational”) i ett område D om $\text{curl}\mathbf{F} = 0$ i D.

Om $\mathbf{F}$ är konservativt så är $\mathbf{F}$ rotationsfritt (se nödvändiga villkor för ett konservativt vektorfält).

Sats 16.2.4. Om $\mathbf{F}$ är glatt, rotationsfritt vektorfält i ett **enkelt sammanhängande** område D så är $\mathbf{F}$ konservativt.

Sats 16.3.6. Greens formel. Antag att D är (reguljärt) slutet och begränsat område vars rand C består av en eller fler styckvis glatta slutna kurvor utan dubbelpunkter, positivt orienterade relativt D. Antag också att $\mathbf{F} = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ är ett vektorfält definierat i D. Då gäller

$$\oint_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.$$

Area som kurvintegral

Antag att C är den positivt orienterade randen till D. Då gäller

$$\oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \text{Arean av } D.$$

Sats 16.4.8 Antag att D är ett tredimensionellt kompakt område vars rand S är en orienterad sluten yta med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ riktad ut från D. Antag också att $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på D. Då gäller

$$\iiint_D \text{div}\mathbf{F}dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$$

Sats 16.5.10 Stokes sats
Låt S vara en styckvis glatt orienterad yta med ehnetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$.

Antag att randen C till S består av en eller flera styckvis glatta, slutna kurvor, positivt orienterade relativt orienteringen av S.

Antag också att $\mathbf{F}$ är ett glatt vektorfält på en öppen mängd D som innehåller S.

Då gäller

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}dS$$