SKALÄRPRODUKT

För geometriska vektorer definierades en produkt, skalärprodukten, som med hjälp av vektorernas koordinater i rätvinkligt koordinat system kunde skrivas

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Denna formel låter sig lätt generaliseras till $\mathbb{R}^n$: för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$ definierar vi

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Med matrisbeteckningar kan detta skrivas $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$

Med hjälp härav och räknelagar för matrisprodukt får vi direkt

Sats 1. Räknelagar för skalärprodukten. Låt $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt c vara en skalär. Då gäller:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$
- $(c\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, och $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$

Normen, längden av en vektor $\mathbf{x}$ är skalären $||\mathbf{x}||$ som ges av

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Notera att $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

En **enhetsvektor** eller **normerad** vektor är en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $||\mathbf{x}|| = 1$

Att **normera** en vektor $\mathbf{x}$ innebär att skapa vektorn $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{||\mathbf{x}||}\mathbf{x}$. Vektorn $\hat{\mathbf{x}}$ har samma riktning som $\mathbf{x}$ och normen 1.

Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. **Avståndet** mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ betecknas $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ och ges av

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

Två vektorer $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ kallas **ortogonala** mot varandra om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Obs! Nollvektorn är ortogonal mot alla vektorer. Ingen annan vektor har denna egenskap.

Pythagoras sats. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala mot varandra omm

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$$

Bevis.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

varav $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$ omm $2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ dvs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är ortogonala mot varandra.

Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Om en vektor $\mathbf{z}$ är ortogonal mot **varje** vektor $u \in W$ så säger vi att $\mathbf{z}$ är ortogonal mot W.

Mängden av alla vektorer $\mathbf{z}$ som är ortogonala mot W kallas W:s **ortogonala komplement**. Denna mängd betecknas $W^{\perp}$.

Viktiga fakta.

a. $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ omm $\mathbf{x}$ är ortogonala mot alla vektorer i mängden som spänner upp W.

b. $W^{\perp}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$ (Exercises 29, 30).

Ex.1 Låt W vara underrumet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, där $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

Sats 3. Låt A vara en $m \times n$-matris. Då gäller:

$$(\mathrm{Row}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A) \text{ och } (\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$$

Bevis. Ur matrisproduktens definition följer att $A\mathbf{x} = 0$ är liktydigt med att $\mathbf{x}$ är ortogonal mot samtliga rader i A (eller hellre transponat, om vi vill att alla vektorer skall vara kolonnvektorer). Detta ger första likheten.

Eftersom $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Row}(A^T)$ får vi också den andra likheten.

Eftersom alla underrum W i $\mathbb{R}^n$ kan erhållas som $\mathrm{Col}(A)$ för någon matris A följer av rangsatsen att

$$\begin{aligned} \mathrm{dim}W + \mathrm{dim}W^{\perp} = \mathrm{dimCol}(A) + \mathrm{dimNul}(A^T) = \\ \mathrm{rank}(A^T) + \mathrm{dimNul}(A^T) = n. \end{aligned}$$

En mängd av vektorer kallas en **ortogonalmängd**, om vektorerna i mängden är parvis ortogonala.

En mängd av vektorer kallas en **ortonormerad** mängd eller en **ON-mängd**, om den är en ortogonalmängd, vars samtliga vektorer är normerade.

En ortogonalmängd som är en bas för ett linjärt rum, kallas en **ortogonalbas**. Om basen är en ON-mängd, kallas den en **ON-bas**.

Sats 4. Om $S = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}\}$ är en ortogonalmängd av nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är S en linjärt oberoende mängd av vektorer.

S är då en bas för underrummet i $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av S.