ORTOGONALITET. ORTOGONALPROJEKTION

En mängd av vektorer kallas en **ortogonalmängd**, om vektorerna i mängden är parvis ortogonala.

En mängd av vektorer kallas en **ortonormerad** mängd eller en **ON-mängd**, om den är en ortogonalmängd, vars samtliga vektorer är normerade.

En ortogonalmängd som är en bas för ett linjärt rum, kallas en **ortogonalbas**. Om basen är en ON-mängd, kallas den en **ON-bas**.

Ex.1 Med $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ har vi att $u_1 \cdot u_2 = 0$, $u_1 \cdot u_3 = 0$ och $u_2 \cdot u_3 = 0$. $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ är således en ortogonal mängd och alltså, enligt sats 4, en ortogonal bas för $H = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

$||u_1|| = \sqrt{6}$, $||u_2|| = \sqrt{9} = 3$, $||u_3|| = \sqrt{21}$.

$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{6}}u_1, \frac{1}{3}u_2, \frac{1}{\sqrt{21}}u_3\}$ är en ON-bas för H.

Sats 5. Låt $\mathcal{B} = \{u_1 \ldots, u_p\}$ vara en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$. Låt y vara en vektor i W.

Koordinaterna för y relativ basen $\mathcal{B}$, $[y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ ges då av

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$$

Om $\mathcal{B}$ är en ortonormerad bas ges koordinaterna av

$$c_j = y \cdot u_j$$

Bevis. Varje vektor y är en linjärkombination av $u_1, \ldots, u_n$, så att

$$y = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n \tag{1}$$

för vissa tal $c_1, \ldots, c_n$. Multiplicera (1) skalärt med u_j, $1 \leq j \leq n$, så fås

$$y \cdot u_j = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i \cdot u_j = c_ju_j \cdot u_j$$

varav

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}.$$

Om $\mathcal{B}$ är en ON-bas, så är $u_j \cdot u_j = 1$ och $c_j = y \cdot u_j$.

Ex.2. Låt S, $\mathcal{B}$ och H vara enligt föregåene exempel och låt $y = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Man kan visa att $y \in H$ (Hur?).

Nu har vi att $y \cdot u_1 = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 12$, $y \cdot u_2 = 27$, $y \cdot u_3 = 21$. Enligt satsen är

$$[y]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

där $c_1 = \frac{12}{6} = 2$, $c_2 = \frac{27}{9} = 3$, $c_3 = \frac{21}{21} = 1$.

Sats 11. Gram-Schmidt ortogonaliseringsprocedur. Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Då har W en ON-bas. Låt $\{u_1, \ldots, u_p\}$ vara en bas för W. Sätt

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\
&\vdots \\
v_p &= u_p - \frac{u_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \ldots - \frac{u_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1}
\end{aligned}$$

Då är $\{v_1 \ldots, v_p\}$ en ortogonal bas för W och $\{v_1/||v_1|| \ldots, v_p/||v_p||\}$ är en ON-bas. Dessutom gäller att

$$\text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{Span}\{u_1, \ldots, u_k\} \text{ för } 1 \leq k \leq p$$

Ortogonalprojektion

I många sammanhang har man ett underrum U av $\mathbb{R}^n$, och man vill kunna dela upp en given vektor $u \in \mathbb{R}^n$ som $u = u' + u''$, där $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$.

Låt $y \neq 0$ vara en given vektor i $\mathbb{R}^n$ och $U = \text{Span}\{y\}$. $u' \in U$ omm $u' = \lambda y$ får något λ. För $u \in \mathbb{R}^n$ existerar ett entydigt $u' \in U$ så att $u - u' = u'' \in U^\perp$. Denna ges av

$$u' = \left(\frac{u \cdot y}{y \cdot y}\right) y \text{ och } u'' = u - u'$$

Notera att u' är parallell med linjen U genom origo med riktningsvektor y. Därför är u' en projektion av u på U. Man använder ibland beteckningen $\text{proj}_y u$ eller $\text{proj}_U u$ för projektionen.

Bevis. En enkel kalkyl ger att

$$u'' \cdot y = (u - u') \cdot y = u \cdot y - \left(\frac{u \cdot y}{y \cdot y}\right) y \cdot y = 0$$

Sats 8. Satsen om ortogonal uppdelning. Låt W vara ett underrum. Då kan varje vektor i $u \in \mathbb{R}^n$ skrivas , på exakt ett sätt, som en summa

$$u = u' + u''$$

där u' är en vektor i W och z är en vektor i $W^\perp$. Vektorn u; kallas projektionen av u på W och betecknas även $\text{proj}_W u$. Om $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är en ortogonal bas för W så beräknas vektorn u' med projektionsformeln

$$u' = \frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \ldots + \frac{u \cdot v_p}{v_p \cdot v_p} v_p \text{ och } u'' = u - u'$$

Sats 9. Satsen om bästa approximation. Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och u en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^n$. Lå u' vara projektionen av u på W. Då är u' den punkt i W som ligger närmast u. Med andra ord gäller att

$$||u - u'|| < ||u - v||$$

för alla v i W med $v \neq u'$.

Sats 6. En $m \times n$-matris U har ortonormerade kolonner om och endast om $U^T U = I$.

Def. En kvadratisk matris U kallas **ortogonal** om $U^{-1} = U^T$.

Sats 6'. En $n \times n$-matris är ortogonal omm den har ortonormerade kolonner ($\Leftrightarrow$ kolonner bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^n$).

Sats 7. Låt U vara en $m \times n$-matris med ortonormerade kolonner och låt x och y vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då gäller:

- a. $||Ux|| = ||x||$
- b. $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
- c. $(Ux) \cdot (Uy) = 0$ omm $x \cdot y = 0$.

Satsen innebär att om en avbildningsmatris U har ortonormerade kolonner så bevaras både längd och vinklar mellan vektorer.

Def. Om A är en $m \times n$-matris och $b \in \mathbb{R}^n$ så är en **minstakvadrat-lösning** till ekvationen $Ax = b$ en vektor $x' \in \mathbb{R}^n$ sådan att

$$||Ax' - b|| \leq ||Ax - b|| \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Minstakvadrat felet är $||Ax' - b||$ då x' är minstakvadrat-lösningen. Ofta använder man istället *kvadratiska medelfelet* som är $||Ax' - b||/\sqrt{n}$, där n är anatalet ekvationer i systemet.

Eftersom $\mathrm{Col}A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\}$ och den y i $\mathrm{Col}A$ som ligger nrmast b r projektionen $\mathrm{proj}n_{\mathrm{Col}A} b$ s blir minstakvadrat-lsningar till $Ax = b$ samma som lsningar till ekvationen

$$Ax = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}A} b.$$

Nsta sats ger ett annat stt att berkna sdana lsningar:

Sats 13. Minstakvadrat-lösningarna till ekvationen $Ax = b$ är samma som lösningarna till den (konsistenta) normaliserade ekvationen

$$A^T A x = A^T b$$

DIAGONALISERING AV SYMMETRISKA MATRISER

Med en symmetrisk (reell) matris menas en matris A sådan att $A^T = A$. ObS! En symmetrisk matris är alltid kvadratisk.

Sats 3. Spektral satsen för reella symmetriska matriser. Låt A vara en reell, symmetrisk, $n \times n$-matris. Då gäller:

1. A har n reella egenvärden om man räknar multiplicitet.
2. För varje egenvärde är egenrummets dimmension samma som egenvärdets multiplicitet som rot till karakteristiska ekvationen.
3. Egenrummen är parvis ortogonala, dvs egenvektorer som svarar olika egenvärden är ortogonala.
4. A kan diagonaliseras med en ortogonal matris.

Om $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ är en ON-bas av egenvektorer till den symmetriska matrisen A och $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ är motsvarande egenvärden så är

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Detta kalls en spektral uppdelning av A.

Observera att varje $u_j u_j^T$ är en projektionmatris på $U_j = \text{Span}\ \{u_j\}$, dvs $u_j u_j^T x = \text{proj}_{U_j} x$ för varje x i $\mathbb{R}^n$.