VEKTORRUMMET $\mathbb{R}^n$
(anpassning till Adams)

En vektor eller punkt i $\mathbb{R}^n$ är en n-tipel av reella tal $(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

En vektor $\mathbf{v}$ eller punkt P i $\mathbb{R}^3$ är en trippel av reella tal (x_1, x_2, x_3). Om vi inför ett ortonormerat koordinatsystem i rummet punkten P kan identifieras med den punkt eller den geometrisk vektor som har koordinater (x_1, x_2, x_3). Om $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ betecknar standard basvektorer är $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

Normen eller **längden** av en vektor $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ är skalären $||\mathbf{v}||$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

$\mathbb{R}^n$ är ett vektorrum m a p följande addition och multiplikation med skalär: om $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ och $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ så är

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda\mathbf{v} &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Skalär multiplikation:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Normen $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

Avståndet mellan punkter $P = (x_1, x_2, x_3)$ och $Q = (y_1, y_2, y_3)$ är längden av vektorn $(x_1 - y_1)\mathbf{i} + (x_2 - y_2)\mathbf{j} + (x_3 - y_3)\mathbf{k}$ dvs

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

FUNKTIONER $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Funktion f från mängden A till mängden B skrivs $f : A \to B$, är en regel som till varje $x \in A$ ordnar ett element $f(x) \in B$.

A kallas **definitionsmängd** eller **domän**, skrivs också $D(f)$. B kallas funktionens **codomän**.

Vi skall betrakta funktioner f vars domän är delmängder av $\mathbb{R}^n$ och codomän är delmängder av $\mathbb{R}^m$.
Även om A inte är hela $\mathbb{R}^n$ så kallas ofta en funktion med definitionsmängden A för funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan man åskadligöra m h a grafen G av f:

$$G = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\} \subset \mathbb{R}^2$$

(en kurva i planet).
Grafen G till $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är

$$G = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) : (x_1, \ldots, x_n) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Om $n = 2$ är G en yta i rummet.

Nivåkurvor till $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är mängderna

$$\{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

där c är en konstant som anger nivån.
Nivåytor till $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är mängderna

$$\{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}.$$

ANDRAGRADSKURVOR.

- Ellips: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- Hyperbel: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ eller $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$
- Parabel: $y = \pm\dfrac{x^2}{a^2}$
- Skärande räta linjer: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$

VEKTORVÄRDA FUNKTIONER AV EN VARIABEL

En vektorvärd funktion av en variabel är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$. Funktionen skrivs

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)).$$

Om $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (eller $\mathbb{R}^2$) används också beteckningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$ (eller $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j}$).

Exempel: Koordinaterna för en partikel som rör sig i ett koordinatsystem i rummet där t är tiden och $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ är punktens koordinater vid tidpunkten t. Om vi plottar punkter $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ för alla t-värden får vi partikelns bana, en kurva i $\mathbb{R}^3$.

Med **derivatan** av funktionen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ menas

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

om alla derivatorna $x_i'(t)$ existerar.

$\mathbf{r}'(t)$ är en tangentvektor till kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ i punkten t.

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ kan uppfatas som hastigheten av partikeln vid tiden t. Längden $v(t) = ||\mathbf{r}'(t)||$ kallas partikelns fart och $\dfrac{d}{dt}\mathbf{r}'(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t)$ dess accelaration.

RÄKNEREGLER

- $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}(\lambda(t))$
- $\frac{d}{dt}||\mathbf{u}(t)|| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{||\mathbf{u}(t)||}$

KURVLÄNGD

En kurva som ges av parametriseringen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ har kurvlängden som ges av

$$s = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)|| dt,$$

och om $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ är

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$