EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

Ex.1 (a) T spegling i planet π: $ax + by + cz = 0$. Låt $\mathbf{n}$ vara en normal till π. Då $T(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} = (-1)\mathbf{n}$ och $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \pi$.

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $M\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1$, $M\mathbf{e}_2 = 3\mathbf{e}_2$.

(c) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $M\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1$, men $M\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är inte parallell med $\mathbf{e}_2$.

Def. En **egenvektor** till en $n \times n$-matris A är en vektor $\mathbf{x} \neq 0$ så att $A\mathbf{x}$ är parallell med $\mathbf{x}$, dvs

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{1}$$

för något tal λ.

Ett tal λ kallas **egenvärde** om det finns en vektor $\mathbf{x} \neq 0$ så att (1) gäller. Varje sådant $\mathbf{x}$ sägs vara en egenvektor till egenvärdet λ.

Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning sägs x vara en egenvektor till egenvärdet λ om

$$T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \neq 0.$$

I **Ex.1(a)** är $\mathbf{n}$ en egenvektor till egenvärdet -1, varje $\mathbf{v}$ i π är en egenvektor till egenvärdet 1.
I **Ex.1(b)** är $\mathbf{e}_1$ en egenvektor till egenvärdet 2, $\mathbf{e}_2$ är inte en egenvektor.

OBS1 λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ har en icke-trivial lösning.
OBS2 Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor så är $\mu\mathbf{v}$, $\mu \neq 0$, också en egenvektor.

Def. Om λ är ett egenvärde kallas mängden av underlinealla lösningar till $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ för egenrummet till egenvärdet λ ($= Nul(A - \lambda I)$, equivalent, alla egenvektorer till λ och nollvektorn.

Ex.2 Linjen L genom origo som är ortogonal mot planet π är egenrummet till egenvärdet -1 för speglingen i planet π. π är egenrummet till egenvärdet $+1$.

Ex.3 Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Visa att 2 är ett egenvärde och bestäm motsvarande egenrum!

Karakteristiskekvation.
λ är ett egenvärde till $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ (den karakteristiska ekvationen), ty
λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ har en icke-trivial lösning $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Ex.4 Sök alla egenvärden till A från Ex.3:

Sats 2. Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en $n \times n$-matris A så är $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ linjärt oberoende.

Bevis. Om $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ är linjärt beroende så finns det $\mathbf{v}_k$ som kan skrivas som en linjär kombination av vektorer $\mathbf{v}_l$ med $l < k$. Tag det minsta p så att $\mathbf{v}_{p+1}$ är en linjär kombination av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ dvs

$$\mathbf{v}_{p+1} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p \tag{2}$$

Då är $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ linjärt oberoende, ty annars finns ett $j < p$ så att $\mathbf{v}_{j+1}$ är en linjär kombination av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j$, vilket strider mot beskrivningen av p. Om nu $A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$ så ger (2) att

$$\lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} = A\mathbf{v}_{p+1} = c_1A\mathbf{v}_1 + \ldots + c_pA\mathbf{v}_p = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots c_p\lambda_p\mathbf{v}_p \tag{3}$$

och

$$\lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots c_p\lambda_p\mathbf{v}_p \tag{4}$$

$(4) - \lambda_{p+1}(2)$ ger

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + \ldots c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p$$

Att $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende ger

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = \ldots = c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) = 0$$

Men $\lambda_1 - \lambda_{p+1} \neq 0, \ldots, \lambda_p - \lambda_{p+1} \neq 0$ som ger

$$c_1 = \ldots = c_p = 0$$

Men då ger (2) att $\mathbf{v}_{p+1} = 0$ vilket är orimligt eftersom en egenvektor $\neq 0$.