EXTREMVÄRDE UNDER BIVILLKOR

Med största värdet av $f(x,y)$ på en mängd D, som förutsätts vara en delmängd av f:s definitionsmängd $\mathcal{D}(f)$, menas största värdet av $f(x,y)$ för punkter som ligger i D.

Ofta ges D av en eller flera olikheter eller ekvationer som $g(x,y) \leq 0$, $g(x,y) = 0$.
Då D ges på detta sätt kallas största värdet av f på D ofta största värdet av f under bivillkoret $g(x,y) \leq 0$, $g(x,y) = 0$.

Man säger att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har **lokalt maximum** i en punkt (a,b) under bivillkoret $g(x,y) \leq 0$ om punkten uppfyller bivillkoret och $f(x,y) \leq f(a,b)$ för alla (x,y) som uppfyller bivilllkoret och ligger i någon lämplig omgivning till (a,b).

Kom ihåg:
Sats 13.1.2 (Existens av extremvärde). Om f är kontinuerlig i ett slutet, begränsat område D så har funktionen ett största värde och ett minsta värde i D. I de punkter dessa värden antas har f lokalt maximum respektive lokalt minimum. De alltså finns bland

- singulära punkter
- randpunkter
- kritiska punkter.

LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD

Sats 13.3.4 Antag att

- funktionerna f och g har kontinuerliga första ordningens partiella derivator i en omgivning av (a,b)
- punkten (a,b) ligger på kurvan $C : g(x,y) = 0$ (dvs $g(a,b) = 0$)
- f har lokalt maximum eller minimum i (a,b) under bivillkoret $g(x,y) = 0$
- punkten (a,b) är inte ändpunkt till kurvan C
- $\nabla g(a,b) \neq 0$.

Då finns ett tal λ så att (a,b,λ) är kritisk punkt för Lagranges funktionen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y),$$

dvs (a,b,λ) uppfyller systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= -\lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= -\lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \\ g(a,b) &= 0 \end{cases}$$

Samma resultat gäller för $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Att (a, b, λ) är en kritisk punkt för $L(x, y, \lambda)$ innebär att $\nabla f(a, b)$ och $\nabla g(a, b)$ är parallella. Detta innebär i sin tur att nivåkurvan $f(x, y) = k$, där $k = f(a, b)$ och kurvan $g(x, y) = 0$ tangerar varandra i punkten (a, b)

Vidare $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b) \Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)) = \lambda(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b))$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Alltså för att bestämma den sökande inre punkt (a, b) måste man bestämma punkter där (1) gäller och $g(a, b) = 0$.

Att (a, b, c, λ) är en kritisk punkt för $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ är ekvivalent med att

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) & = & -\lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) & = & -\lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) & = & -\lambda \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) \\ g(a, b, c) & = & 0 \end{cases}$$

Flera bivillkor.
Betrakta tre-dimensionellt problem: Minimera/maximera $f(x, y, z)$ under bivillkoren $g_1(x, y, z) = 0$ och $g_2(x, y, z) = 0$.
Sats. Antag att

- funktionerna f, g_1, g_2 har kontinuerliga första ordningens partiella derivator i en omgivning av (a, b, c)
- punkten (a, b, c) ligger på ytorna: $g_1(x, y, z) = 0$ och $g_2(x, y, z) = 0$ (dvs $g_i(a, b, c) = 0,\ i = 1, 2$)
- $\nabla g_1(a, b, c) \times \nabla g_2(a, b, c) \neq \mathbf{0}$
- f har lokalt maximum eller minimum i (a, b, c) under bivillkoren $g_i(x, y, z) = 0,\ i = 1, 2$.
- punkten (a, b, c) är inte ändpunkt till skärningskurvan C mellan ytorna $g_1(x, y, z) = 0$ och $g_2(x, y, z) = 0$.

Då finns tal λ, μ så att (a, b, c, λ, μ) är en kritisk punkt för Lagranges funktionen

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu g_2(x, y, z).$$

Att (a, b, c, λ, μ) är en kritisk punkt för $L(x, y, z, \lambda, \mu)$ innebär att $\nabla f(a, b, c)$ och $\nabla g_1(a, b, c)$, $\nabla g_2(a, b, c)$ är linjärt beroede och däremed

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}(a, b, c) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(a, b, c) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(a, b, c) \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Alltså för att bestämma den sökande inre punkt (a, b, c) måste man bestämma punkter där (2) gäller och $g_1(a, b, c) = 0$, $g_2(a, b, c) = 0$.