Lösningsförslag till Tentamen

2015-03-19

1a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + e^{y^2-x^2}(y^2-x^2)'_x = 2 - 2x e^{y^2-x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + e^{y^2-x^2}(y^2-x^2)'_y = 1 + 2y e^{y^2-x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $f(0,0) = 1$

En ekvation för tangentplanet är

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

dvs

$$\underline{z = 1 + 2x + y.}$$

Låt $L(x,y) = 1 + 2x + y$ (linjäriseringen av f i $(0,0)$)

Då $f(-0.02, 0.01) \approx L(-0.02, 0.01) =$

$= 1 - 0.04 + 0.01 = 0.97.$

Svar: $z = 1 + 2x + y$, $f(-0.02, 0.01) \approx 0.97$

b) $\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4t^2 + 4} = \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2} = 2t + \frac{1}{t}$

Längden $= \int_1^2 \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right)dt = \left[t^2 + \ln|t|\right]_{t=1}^{t=2} =$

$= 3 + \ln 2.$

Svar: $3 + \ln 2$

c) Linjens ekvation är $y = kx + l$.

Man söker minstakvadrat-lösning $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ till systemet

$$\begin{cases} k\cdot 0 + l = 0 \\ k\cdot 1 + l = 1 \\ k\cdot 2 + l = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad A\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{där}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Den uppfyller systemet

$$A^T A\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = A^T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dvs} \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi har $\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

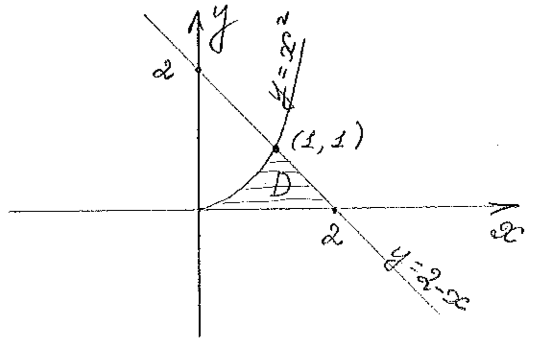
Linjens ekvation blir alltså $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

d) $\underline{\operatorname{div} \mathbb{F}} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(yz^2) =$

$= \underline{y + 2yz}$

$$\underline{\operatorname{curl} \mathbb{F}} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z & yz^2 \end{vmatrix} = \underline{\mathbb{i}(z^2-1) - \mathbb{j}\cdot 0 + \mathbb{k}(-x)}$$

Vektorfältet är varken källfritt eller virvelfritt i $\mathbb{R}^3$



2a) Skärningspunkten mellan kurvorna ges av

$2 - x = x^2, \quad x \geq 0$

$\Leftrightarrow x = 1.$

D är ett x-enkelt område:

$0 \leq y \leq 1 \qquad \sqrt{y} \leq x \leq 2-y$

och därmed

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy^2\,dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2}\left((2-y)^2 - y \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4y^2 - 5y^3 + y^4)\,dy = \ldots = \frac{17}{120}$$

b) $$\iiint_K (x + ye^z)\,dV = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 \left(\int_1^2 (x + ye^z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 (x + y(e^2 - e))\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x + \frac{1}{2}(e^2 - e) \right) dx = e^2 - e$$

3a) A är symmetrisk och därmed diagonaliserbar

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{0} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet 0.

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 2 & -1\\0 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

dvs $v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet $\frac{1}{2}$

$$A\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 2 & -1\\0 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

dvs $v_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet $\frac{1}{2}$

$$A\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 0 & -1\\-1 & 0 & 2 & -1\\0 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

dvs $v_4 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet 1.

Vektorerna v_1, v_2, v_3, v_4 är linjärt oberoende: detta följer ur en sats som säger att egenvektorer till olika egenvärde är linjärt oberoende och vektorerna v_2, v_3 som är egenvektorer till $\lambda = \frac{1}{2}$ är klart linjärt oberoende. Man ser detta också genom att observera att vektorerna är ortogonala mot varandra.

Vi har alltså

$A = PDP^{-1}$ där t.ex $P = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4] =$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

och $D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(b) Vi har

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Om $n \to \infty$ så $A^n \to P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$

Eftersom v_1, v_2, v_3, v_4 är parvis ortogonale
och $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = \|v_4\| = 2$
så blir $\frac{1}{2}P$ en ortogonal matris
och $\left(\frac{1}{2}P\right)^T = \left(\frac{1}{2}P\right)^{-1}$ varav $2P^{-1} = \frac{1}{2}P^T$
dvs $P^{-1} = \frac{1}{4}P^T$

Detta ger att gränsvärdet är

$$P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^T = \ldots = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5 a) Se kursboken

b) Vi har $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + \cos y) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3)$.

Eftersom $\mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande
så blir $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$.

Låt oss bestämma en potential $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ till $\mathbb{F}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy - 3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + \cos y \end{cases}$$

Ur 1a ekvationen får man $\varphi(x,y) = x^2y - 3x + C(y)$
Vi sätter in detta uttryck i 2a ekvationen och får

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + C'(y) = x^2 + \cos y$$

varav $C'(y) = \cos y$ och $C(y) = \sin y + \text{konst}$

En potential ges av $\varphi(x,y) = x^2y - 3x + \sin y$

Arbetet $= \int_C \mathbb{F} \cdot dr = \varphi(2,1) - \varphi(0,0) = 4 - 6 + \sin 1 = -2 + \sin 1$.

5. Man skall minimera/maximera

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ under bivillkoren

$\underbrace{z^2-x^2-y^2}_{g_1(x,y,z)}=0$ och $\underbrace{z-x-y-2}_{g_2(x,y,z)}=0$

Låt R vara stort.

Den delen av skärningskurvan som ligger innanför sfären $x^2+y^2+z^2=R$ är kompakt och därmed har $f(x,y,z)$ minsta värde på den, och eftersom $f(x,y,z)>R$ utanför sfären blir detta värde min f på hela skärningskurvan

Minimipunkten kan beräknas mha Lagranges multiplikatormetod:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \nabla f \\ \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{vmatrix} = 0 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2x & -2y & 2z \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ z^2 = x^2+y^2 \\ z = x+y+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4z \\ -2x & -2y & 2z \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ z^2 = x^2+y^2 \\ z = x+y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z(2x-2y)=0 \\ z^2=x^2+y^2 \\ z = x+y+2 \end{cases}$$

Ur 1^a ekvationen : $z=0$ eller $x=y$

Om $z=0$ så $x^2+y^2=0$ och $x+y+2=0$ som är orimligt.

Om $x=y$ så $z^2=2x^2$ och $z=2x+2$

dvs $\begin{cases}(2x+2)^2=2x^2 \\ z=2(x+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+2=0 \\ z=2(x+1)\end{cases} \Leftrightarrow$

$x_1 = -2-\sqrt{2}$, $x_2 = -2+\sqrt{2}$

Vi har två kandidater för minimipunkten:

$P_1 = (-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, 2(-2-\sqrt{2}+1))$ och $P_2 = (-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}, 2(-2+\sqrt{2}+1))$

$f(P_1) = (2+\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2+(2(-1-\sqrt{2}))^2 = 8(3+2\sqrt{2})$

$f(P_2) = (-2+\sqrt{2})^2+(-2+\sqrt{2})^2+(2(-1+\sqrt{2}))^2 = 8(3-2\sqrt{2})$

Vi får alltså att P_2 är den punkt på kurvan som ligger närmast origo.

Funktionen f saknar maximum på kurvan ty den är obegränsad:

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ z = x+y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y+2)^2 = x^2+y^2 \\ z = x+y+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x+4y+2xy+4=0 \\ z = x+y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2+x) = -2-2x \\ z = x+y+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -2\cdot\frac{1+x}{2+x} = -2\left(\frac{2+x}{2+x} - \frac{1}{2+x}\right) = -2+\frac{2}{2+x} \\ z = x+y+2 \end{cases}$$

På skärningskurvan finns punkter (x,y,z) vars x-koord och därmed värdet $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ kan vara hur stort som helst.

6. Området är begränsat av två ytorna S_1: $z = 4-x^2-y^2$

S_2: $z=0$.

Flödet av $\mathbb{F}$ ut ur området $= \int_{S_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} + \int_{S_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$

S_1 parametriseras enligt

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(x,y) = (x, y, 4-x^2-y^2)$

där $x^2+y^2 \le 4$ (projektionen av ytan $z = 4-x^2-y^2$, $z\ge 0$ på xy-planet)

$$\mathbb{r}'_x \times \mathbb{r}'_y = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\mathbb{i} + 2y\mathbb{j} + \mathbb{k}$$

som pekar ut ur området

$$\int_{S_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \mathbb{F}(x,y,4-x^2-y^2)\cdot \mathbb{r}'_x\times\mathbb{r}'_y\, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (2x^3+2y^3+(4-x^2-y^2)^2)\,dxdy =$$

$$= \left| \text{Av symmetriskäl blir } \iint_{x^2+y^2\le 4} x^3\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4} y^3\,dxdy = 0 \right| =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (4-x^2-y^2)^2\,dxdy = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koord.} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (4-r^2)^2 r\,dr\right)d\varphi = \frac{64}{3}\pi$$

Enhetsnormalen till S_2 som pekar ut ur området
är $\hat{N}(x,y,0) = -\mathbb{k}$

och

$$\int_{S_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \mathbb{F}(x,y,0) \cdot \hat{N}(x,y,0)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2\mathbb{i} + y^2\mathbb{j} + 0\cdot\mathbb{k}) \cdot (-\mathbb{k})\, dx\,dy = 0$$

Vi har alltså att flödet $= \frac{64}{3}\pi$

7. a) $$\| u_1 + u_2 + \ldots + u_n \|^2 = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \cdot (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) =$$

$$= u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + \ldots + u_n \cdot u_n + \underbrace{\sum_{i \ne j} u_i \cdot u_j}_{= 0} =$$

$$= \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$$

Låt $H = \text{Span}\{u_1, \ldots, u_n\}$

b) $a = \text{proj}_H a + (a - \text{proj}_H a)$

ligger i H — ligger i $H^\perp$

$$\text{proj}_H a = (a \cdot u_1) u_1 + \ldots + (a \cdot u_n) u_n$$

Eftersom

$$\|a\|^2 = \|\text{proj}_H a\|^2 + \|a - \text{proj}_H a\|^2 \le \|\text{proj}_H a\|^2$$

och

$$\|\text{proj}_H a\|^2 = \|(a \cdot u_1) u_1 + \ldots + (a \cdot u_n) u_n\|^2 = \text{enligt (a)} =$$

$$= (a \cdot u_1)^2 \|u_1\|^2 + \ldots + (a \cdot u_n)^2 \|u_n\|^2 =$$

$$= (a \cdot u_1)^2 + \ldots + (a \cdot u_n)^2,$$

vi får

$$(a \cdot u_1)^2 + \ldots + (a \cdot u_n)^2 \le \|a\|^2.$$