MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2014-03-10 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: Lyudmila Turowska

tel. 0738-371135

TMV036/MVE350 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt KI, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 13/14 inkluderas.)

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. (a) Skissa nivåkurvor till ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ samt själva ytan. (2p)

(b) Låt C vara den del av sinuskurvan $y = \sin x$ där $0 \leq x \leq 2\pi$. Ställ upp en integral som ger längden på kurvan C (Du behöver inte beräkna integralen). (2p)

(c) Betrakta de tre punkterna $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$. Bestäm den räta linje som i minsta kvadratmetodens mening bäst anpassar till de tre punkterna. (3p)

2. (a) Definiera begreppen partiell derivata och riktningsderivata och förklara varför partiell derivata kan betraktas som specialfall av riktningsderivata. (2p)

(b) Beräkna partiella derivator till (2p)

$$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2) + \cos(\pi x)$$

i punkten $(2,-2)$.

(c) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = \sin(x^2 + y^2) + \cos(\pi x)$ i $(2,-2,1)$. (2p)

(d) För funktionen f i (b) beräkna approximativt $f(2.1,-1.8)$. (2p)

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D (x^2 - y^2)dA$$

där D är det område i andra kvandranten som avgränsas av y-axeln, linjen $y = -x$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (Bra att veta: $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$).

(b) Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\iiint_K xydV$$

där K är det område i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ samt planen $z = 1 - x$ och $y = 1$.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) A har egenvärdena 6 och 0. Bestäm respektive egenvektorer. (3p)

(b) Finns det en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Motivera. Bestäm i så fall en sådan. (3p)

Var god vänd!

5. Låt $f(x,y) = 6xy - 2x^3 - 3y^2$ och $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$. (5p)

(a) Bestäm alla kritiska punkter till $f(x,y)$ i R.

(b) Bestäm största värde som $f(x,y)$ antar på randen av rektangeln R.

(c) Bestäm största värde som $f(x,y)$ antar på R. Motivera väl.

6. Låt $\mathbf{F}(x,y) = (\sin x + 3y^2 + x^5)\mathbf{i} + (2x - e^{y^2} + y)\mathbf{j}$. (6p)

(a) Är $\mathbf{F}$ konservativt? Motivera tydligt Ditt svar.

(b) Med hjälp av Greens formel beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är den positivt orienterade randen till triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$.

(c) Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar för att förflytta en partikel längs γ som i tur och ordning med räta linjer förbinder punkterna $(2,0)$, $(1,1)$ och $(0,0)$. (Tips: Använd resultat i (b)).

7. Två parallella plan skär en sfär. Visa att arean av den del av sfären som ligger mellan planen beror endast på sfärens radie och avståndet mellan planen (du behöver bl.a. parametrisera den delen av sfären). (6p)

8. (a) Antag att A är en kvadratisk matris och att man ha två egenvektorer till denna. Visa att om egenvektorerna svarar mot olika egnevärde så är de icke parallella. (4p)

(b) Vad menas med Hessianen $\mathcal{H}(a,b)$ till en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i punkten (a,b)? Låt (a,b) vara en kristisk punkt till f. Hur kan man med hjälp av egenvärden till $\mathcal{H}(a,b)$ avgöra om funktionen f har lokalt maximum, lokalt minimum eller sadelpunkt i (a,b)? (2p)

Lycka till!
Lyudmila T