MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2014-08-25 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Matteo Molteni
tel. 0703-088304

TMV036/MVE350 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt KI, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 13/14 inkluderas.)
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. (a) Låt $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$ vara definierad för $x > 0$, $y > 0$. Ange en ekvation till tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

(b) Bestäm linjäriseringen för $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$ i $(1, 1)$ och utnyttja denna för att bestämma ett approximativt värde på $f(0.9, 1.2)$ (3p)

2. Låt $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$.

(a) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1, 1)$ i riktningen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(b) Bestäm kritiska punkter till f. Bestäm karaktär för en av dem. Valet är Ditt. (3p)

3. (a) Beräkna arean av ytan $Y\colon r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u^2, 2uv, 2v^2)$, där $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$. (3p)

(b) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

där D ges av $x^2 + y^2 \le 1$, $-y \le x \le y$.

4. Matrisen (5p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har egenvärdena 1 och -1. Bestäm respektive egenvektorer. Ge argument som visar att A är diagonaliserbar.
Ange en matris P som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris D, dvs $A = PDP^{-1}$.

5. Vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ spänner upp ett underrum H i $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för H. (3p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ på H. (2p)

Var god vänd!

6. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma största och minsta avståndet från ellipsen $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$ till origo. (5p)

7. Låt $\mathbf{F}(x, y) = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ och låt C vara övre halvan av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, orienterad medurs. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dels genom att parametrisera halvcirkeln och använda definitionen av kurvintegralen och dels genom att använda Greens formel. Bra att veta: $\sin^2 \alpha = (1 - \cos(2\alpha))/2$, $\cos^2 \alpha = (1 + \cos(2\alpha))/2$. (6p)

8. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till skärningskurvan mellan de två ytorna $z = 1 - x^2 + y^2$ och $yz^2 - x = 1$ i punkten $(-1/2, 1/2, 1)$. (6p)

9. Låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vara parvis ortogonala nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att om $W = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ så är $\dim W = k$. Du skall inte hänvisa till ett resultat som vi har bevisat i kursen, Du måste bevisa det. (6p)

Kan det finnas fem parvis ortogonala nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^4$? Motivera väl.

Lycka till!
Lyudmila T