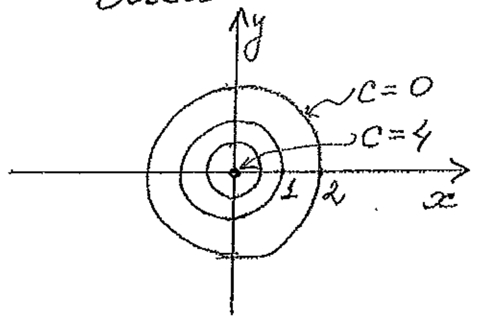
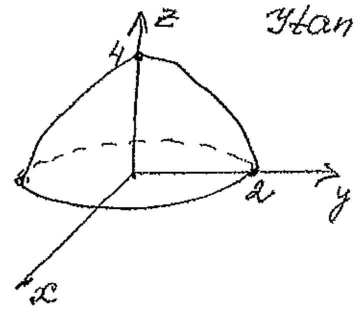
Lösningsförslag Tenta 2014-03-10.

1. (a) Nivåkurvorna ges av
$$4-x^2-y^2=C \iff x^2+y^2=4-C$$
för olika värden på konstanter C, $4-C\geq 0$.
Dessa är cirklar med centrum i $(0,0)$ och radien $\sqrt{4-C}$



Ytan är



(b) Längden av kurvan C $= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+(\sin' x)^2}\,dx =$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx, \text{ ty}$$
en parametrisering av sinuskurvan är
$$\mathbb{r}=\mathbb{r}(x)=(x,\sin x),\quad x\in[0,2\pi]$$
$$\mathbb{r}'(x)=(1,\sin' x)=(1,\cos x).$$

(c) Låt
$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$
Koefficienter (k,l) sådana att linjen $y=kx+l$ bäst ansluter till de givna punkterna i minstakvadratmetodens mening uppfyller systemet
$$A^TA\begin{bmatrix}l\\k\end{bmatrix}=A^Tb$$
(dvs minstakvadratlösning $\begin{bmatrix}l\\k\end{bmatrix}$ till systemet
$$\begin{cases} l+k\,1=1\\ l+k\cdot 2=2\\ l+k\cdot 3=0\end{cases} \iff A\begin{bmatrix}l\\k\end{bmatrix}=b \quad)$$

Vi har $\begin{bmatrix}l\\k\end{bmatrix}=(A^TA)^{-1}A^Tb=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}14&-6\\-6&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1/2\end{bmatrix}$

Linjens ekvation blir alltså $\underline{y=-\frac{1}{2}x+2}$

2a) Se kursboken

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2-y^2)\cdot 2x - \sin(\pi x)\cdot \pi$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2-y^2)\cdot(-2y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-2) = \cos 0 \cdot 2\cdot 2 - \sin(2\pi)\cdot\pi = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-2) = \cos 0\cdot(-2\cdot(-2)) = 4$

(c) En ekvation för tangentplanet till ytan $z = \underbrace{\sin(x^2-y^2)+\cos(\pi x)}_{f(x,y)}$ i $(2,-2,1)$ ges av

$z = f(2,-2) + f_x'(2,-2)(x-2) + f_y'(2,-2)(y+2) =$

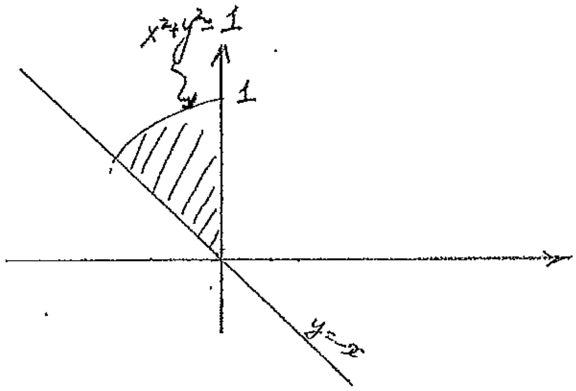
$= 1 + 4(x-2) + 4(y+2) = 1 + 4x + 4y$

<u>Svar</u> $z = 1+4x+4y$

(d) $L(x,y) = 1 + 4(x-2) + 4(y+2)$ är en linjärisering av $f(x,y) = \sin(x^2-y^2) + \cos(\pi x)$ i $(2,-2)$

$f(2.1,-1.8) \approx L(2.1,-1.8) =$
$= 1 + 4(2.1-2) + 4(-1.8+2) = 2.2$

<u>Svar</u> $f(2.1,-1.8) \approx 2.2$.



3 a)

$\iint_D (x^2-y^2)\,dA = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koordinater} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0\le r\le 1,\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4} \end{array} \right|$

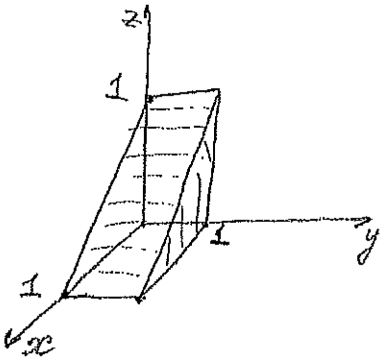
$= \int_{\pi/2}^{3\pi/4}\left(\int_0^1 (r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi =$

$= \int_{\pi/2}^{3\pi/4}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4} =$

$= -\frac{1}{8}$

3b)

$$\iiint_K xy\,dV = \iint_D \left(\int_0^{1-x} xy\,dz\right)dx\,dy =$$



där D är projektionen av K på xy-planet och är rektangeln = kvadrat $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

$$= \iint_D xy(1-x)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 xy(1-x)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 (x-x^2)\,dx \int_0^1 y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

<u>Svar</u>: $\frac{1}{12}$

4. a) Egenvektorer till $\lambda = 6$:

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna ges av $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(t,s) \neq (0,0)$

Egenvektorer till $\lambda = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna ges av $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$

(b) A är symmetrisk och därmed finns en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av A:s egenvektorer.

Låt $\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{en bas för egenrummet till } \lambda=6}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ ← en bas för egenrummet till $\lambda = 0$

v_3 är ortogonal mot v_1, v_2

Det gäller att ortogonalisera $\{v_1, v_2\}$:

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Vektorerna u_1, u_2, v_3 är en ortogonalbas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till A.

En ON-bas: $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

5. a) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6y - 6x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^2 = 0 \\ y = x \end{cases}$

f:s kritiska punkter är $(0,0)$, $(1,1)$.

(b) Randen till R består av fyra kurvor

$\gamma_1 = \{(t,0) : t \in [0,2]\}$, $\gamma_2 = \{(0,t) : t \in [0,2]\}$

$\gamma_3 = \{(t,2) : t \in [0,2]\}$, $\gamma_4 = \{(2,t) : t \in [0,2]\}$

På γ_1 är $f(t,0) = -2t^3$ varav $\max\limits_{\text{på } \gamma_1} f = 0$

γ_2: $f(0,t) = -3t^2$ varav $\max\limits_{\text{på } \gamma_2} f = 0$

γ_3: $f(t,2) = 12t - 2t^3 - 12$, $t \in [0,2]$

låt $g(t) = -2t^3 + 12t - 12$

$g'(t) = -6t^2 + 12 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ ej ligger i $[0,2]$)

$g(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 12 = 8\sqrt{2} - 12$

$\cancel{g(-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12 = -8\sqrt{2} - 12}$

$g(0) = -12$, $g(2) = -4$

$\max\limits_{\text{på } \gamma_3} f = \max\limits_{\text{på } [0,2]} g = \max\{g(\sqrt{2}), \cancel{g(-\sqrt{2})}, g(0), g(2)\}$

$= \underline{8\sqrt{2} - 12}$

γ_4: $f(2,t) = 12t - 16 - 3t^2$, $t \in [0,2]$

låt $h(t) = 12t - 16 - 3t^2$

$h'(t) = 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2$

$h(2) = -4$, $h(0) = -16$

$\max\limits_{\text{på } \gamma_4} f = \max\limits_{\text{på } [0,2]} h = -4$

Vi har alltså att det största värde som f antar på randen är $\cancel{8\sqrt{2}-12}$ 0

(c) Det största värde som f antar på R är $\max\{f(0,0), f(1,1), \cancel{8\sqrt{2}-12}\ 0\}$ =

f:s värde i kritiska punkter

största värdet på randen

$= \max\{0, 1, 8\sqrt{2}-12\} = 1$

Svar: 1

6 (a) Vi har

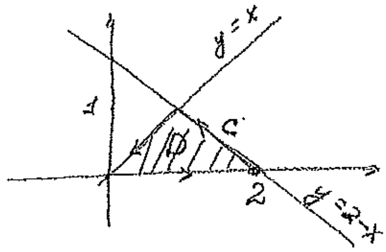
$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 3y^2 + x^5) = 6y$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(2x - e^{y^2} + y) = 2$$

Som visar att F inte är konservativt.

(b) Enligt Green's formel är

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x - e^{y^2} + y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 3y^2 + x^5)\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (2-6y)\,dx\,dy$$



där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$

D är ett x-enkelt område : $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2-y$ och därmed

$$\iint_D (2-6y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (2-6y)\,dx\right) dy =$$

$$= \int_0^1 (2-6y)\left(\int_y^{2-y} dx\right) dy = \int_0^1 (2-6y)(2-2y)\,dy =$$

$$= 4\int_0^1 (1-4y+3y^2)\,dy = 4\left[y-2y^2+y^3\right]_0^1 = 0$$

Svar: 0

(c)

Arbetet $= \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$

Låt γ_1 vara det räta linjestycket från $(0,0)$ till $(2,0)$

Då $\oint_{\gamma+\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \left|\text{enligt (b)}\right| = 0$

varav $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$

Vi beräknar $\int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$ m h a kurvintegralens definition:

γ_1 har parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $t \in [0,2]$

$$\int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^2 \left((\sin t + t^5)\,i + (2t-1)\,j\right)\cdot(1i + 0j)\,dt$$

$$= \int_0^2 (\sin t + t^5)\,dt = \left[-\cos t + \frac{t^6}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{35}{3} - \cos 2$$

<u>Svar</u>: Arbetet $= \cos 2 - \frac{35}{3}$.

7. Låt S vara den delyta av sfären som ligger mellan de två planen.
Vi kan anta att de två planen är parallella med xy-planet, dvs att de ges av $z = a$ och $z = b$, $a < b$.

Vi söker $\iint_S dS$

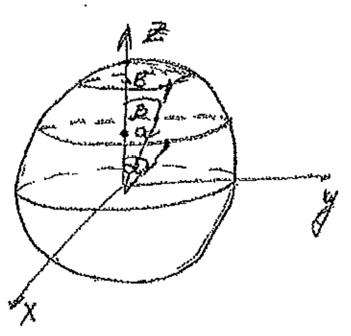
Vi parametriserar S m h a sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

R – sfärens radie

$0 \le \theta \le 2\pi$

$\alpha \le \varphi \le \beta$



Om $\mathbb{r} = \mathbb{r}(\varphi, \theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$
så är

$$\mathbb{r}'_\varphi \times \mathbb{r}'_\theta = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbb{i}\, R^2\sin^2\varphi\cos\theta - \mathbb{j}\, R^2\sin^2\varphi\sin\theta + \mathbb{k}\, R^2\cos\varphi\sin\varphi$$

och

$$\|\mathbb{r}'_\varphi \times \mathbb{r}'_\theta\| = R^2\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} =$$
$$= R^2\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} = R^2\sin\varphi$$

Detta ger

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_\alpha^\beta R^2\sin\varphi\, d\varphi\right)d\theta =$$
$$= 2\pi R^2\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\beta} = 2\pi R(R\cos\alpha - R\cos\beta) =$$
$$= \underline{2\pi R(a-b)}$$

Detta uttryck beror av bara sfärens radie och avståndet $a-b$ mellan planen.

8a) Låt $\mathbb{V}_1$ vara en egenvektor till egenvärde λ_1
$\mathbb{V}_2$ — // — λ_2
och $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Antag att $\mathbb{V}_1$ och $\mathbb{V}_2$ är parallelle dvs
$(*)$ $\mathbb{V}_1 = c\mathbb{V}_2$ för något tal c.

Då $A\mathbb{V}_1 = cA\mathbb{V}_2$ (1)

Eftersom $A\mathbb{V}_1 = \lambda_1\mathbb{V}_1$ och $A\mathbb{V}_2 = \lambda_2\mathbb{V}_2$

så ger (1)

$$\lambda_1\mathbb{V}_1 = c\lambda_2\mathbb{V}_2 \qquad (2)$$

Multiplikation av $(*)$ med λ_1 ger

$$\lambda_1\mathbb{V}_1 = c\lambda_1\mathbb{V}_2 \qquad (3)$$

(2) och (3) ger nu $c\lambda_2\mathbb{V}_2 = c\lambda_1\mathbb{V}_2$ och därmed
$c(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbb{V}_2 = 0$

Eftersom $\mathbb{V}_2 \neq 0$ som egenvektor och $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så måste $c = 0$ och därmed

$$\mathbb{V}_1 = c\mathbb{V}_2 = 0.$$

Detta är motsägelse, ty $\mathbb{V}_1$ är en egenvektor och kan ej vara 0.