

TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 15

Vecko-PM läsvecka 2

Lay: 6.1-6.6, 7.1

Innehåll: Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden, spektralsatsen.

I kapitel 6.1 införs *skalärprodukt*, *dot product* och *längd*, eller *norm* som kanske är ett bättre namn. Dessa motsvarar skalärprodukt och längd för geometriska vektorer då vektorerna ges i en ON-bas. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. Ortogonal komplementet till ett underrum i \mathbb{R}^n är ett begrepp som generaliserar normalen till ett plan genom origo.

I avsnitt 6.2 är begreppet ON-bas, ortonormerad bas, viktigt. **Sats 4** säger att ortogonalitet garanterar linjärt oberoende. Sats 5 visar hur lätt det är att bestämma koordinater i en ortogonal bas. Ännu enklare är det i en ON-bas, då är $x_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k$

Projektionsformeln, som ger projektionen av en vektor på en annan, är samma som inledande kursen. Motiveringen till formeln måste vara algebraisk eftersom vi inte har några vinklar i \mathbb{R}^n . Vi använde projektionsformeln i inledande kursen för att dela upp en vektor i två ortogonala komponenter, den ena med en given riktning och den andra i planet ortogonalt mot denna riktning. En vidareutveckling av denna idé kommer i sats 8 och sats 10 i 6.3. Begreppet ortogonala matriser som nämns i förbigående i 6.2 kommer att användas mycket i kapitel 7.

I 6.4 ges Gram-Schmidt processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W . Metoden är enkel, det gäller att i varje steg använda projektionsformeln för att ersätta en vektor i basen med en som är ortogonal mot de redan bestämda vektorerna i den sökta ortogonala basen.

I avsnitt 6.5 ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning*. I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna lösning till ekvationen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ av $\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$.

Sats 13 ger metoden i en liten ask. Däremot har man inte direkt nytta av sats 14, det viktiga är att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 13 entydig lösning.

I kapitel 7.1 studeras diagonalisering av reella symmetriska matriser, alltså matriser som uppfyller att $A^T = A$. Våldigt många tillämpningar leder till symmetriska matriser så resultatet i kapitlet är mycket användbara. I avsnittet ges två mycket viktiga sats. Dels sats 2, som säger att de reella symmetriska matriserna, och inga andra, alltid kan diagonaliseras med en ortogonal matris. *Spektralsatsen*, sats 3, beskriver situationen mer i detalj och ger hjälp vid problemlösning. Bevisen av satserna i kapitlet ryms inte i kursen. Utöver att man nu väljer en ortonormerad bas av egenvektorer är det ingen väsentlig skillnad på diagonalisering av symmetriska matriser och osymmetriska som behandlades i kapitel 5.3.

Mål: För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna skalärprodukten av två vektorer i \mathbb{R}^n , tillämpa räkneregler för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i \mathbb{R}^n och beräkna avståndet mellan vektorer i \mathbb{R}^n .
- avgöra om två vektorer i \mathbb{R}^n är ortogonala
- bevisa Pythagoras sats i \mathbb{R}^n .
- förklara vad som menas med W^\perp om W är ett underrum i \mathbb{R}^n

- tillämpa sats 6.1.3 vid problemlösning.
- förklara vad som menas med *ortogonal bas* för ett underrum W och tillämpa sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W .
- använda projektnionsformeln 6.2.(2) i problemlösning
- förklara vad som menas med *ortonormerad bas* för ett underrum W .
- förklara vad som menas med en ortogonal matris.
- tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i \mathbb{R}^n utgående från en annan bas för W .
- förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning och tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
- tillämpa satserna 1 – 3 i kapitel 7.1 vid problemlösning. Spektralsatsen (sats 3) är extra viktig.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa sats 6.2.4.
- förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonalbas
- förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
L.6.1	1, 5, 11
L.6.2	1, 7, 9 , 11, 13
L.6.3.	1, 3, 7, 11
L.6.4.	1, 9
L.6.5	1, 3, 5, 7, 9
L.6.6	1, 3 , 9
L.7.1	1, 4, 15, 17

Extra 1. Låt $W = \text{Span}\{[1 \ 2 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 3 \ 0]^T\}$. Bestäm det ortogonala komplementet W^\perp .

2. Låt W vara det tredimensionella underrum i \mathbb{R}^5 som genereras av vektorerna $[1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $[1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0]^T$. Bestäm en bas för det ortogonala komplementet.

”**Tjocka**” uppgifter skall räknas på tavlan.