TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 15
Vecko–PM läsvecka 3

Vi inleder veckan med kapitel i Adams som introducerar till funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Adams: 12.1 Funktionsbegreppet och de begrepp som hänger samman med detta är välkända från tidigare kurser. En reelvärd funktion av en variabel kan åskadliggöras i ett plan. För funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ kräver motsvarande grafiska bild $n+m$ dimensioner, besvärligt om $n+m=3$, omöjligt om $n+m>3$. Den "vanliga" grafen ersätts eller kompletteras därför ofta med nivåkurvor eller nivåytor till funktioner.

Adams: 11.1-11.3 I **11.1** introduceras begreppet *vektorvärd funktion.* Här är det bättre att tänka på elementen i $\mathbb{R}^n$ som *punkter* istället för *vektorer.* Om f är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$ så har vi för varje reellt tal t en punkt $f(t)=(x(t),y(t))$ i planet. Då t genomlöper ett interval på t-axeln så kommer punkterna $(x(t),y(t))$ att genomlöpa en kurva i planet (Läs själv om plana parametriserade kurvor i kapitel 8.2). Derivering sker koordinatvis vilket leder till ett antal deriveringsregler, dels de du kan sedan tidigare kurser och dels en del nya. Derivatan har många viktiga tillämpningar, några intressanta fysykaliska finns i kapitel 11.2. Vi tar speccielt upp hastighet och acceleration i 11.1 och kurvlängd i 11.3.

Adams: 12.2, 12.3 Kapitel **12** handlar om funktioner av flera variabler. Vi ska arbeta med en del begrepp som är välkända från envariabelanalysen men nu i en mer generell tappning. **12.2** handlar om gränsvärden till funktioner av flera variabler samt begreppet kontinuitet. Vi kommer känna igen definitionerna men kommer också upptäcka att situationen i flera variabler är lite mer komplex: det finns bara två sätt att närma sig en punkt på x-axeln, nämligen från vänster eller från höger, men det finns oändligt många sätt att närma sig en punkt, säg, i xy-planet. Precis som i den endimensionella nalysen är begreppet kontinuitet direkt knutet till gränsvärdesbegreppet.
12.3 handlar om att derivera funktioner av flera variabler. Vi vet att derivatan av en reellvärd funktion $f(x)$ av en variable i en punkt x_0 mäter hur "snabbt"/"långsamt" funktionsvärdena förändras i en omgivning av x_0 och man vill att derivatan skall ha samma betydelse även för funktioner i flera variabler. Det är dock inte givet hur man skall mäta denna förändring eftersom vi i omgivning av en punkt i $\mathbb{R}^n$ har oändligt många riktningar att ta hänsyn till. De partiella derivatorna mäter förändringshastigheten i axelparallella riktingar och med dessa samlade i en vektor som kallas gradienten, kan vi sedan enkelt bestämma förändringshastigheten i alla andra riktningar genom s.k. riktningsderivata som ska introduceras nästa vecka. Med hjälp av partiella derivatot skall vi bestämma tangentplan och normaler till funktionsytor och nivåytor.

Innehåll: Reelvärda och vektorvärda funktioner. Kurvor och ytor. Gränsvärden och kontinuitet. Partiella derivator.
Mål:
För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

- redogöra för funktionsbegreppen (def. A.12.1), begreppen nivåkurva och nivåyta samt skissa enkla funktionsytor
- derivera vektorvärda funktioner av en variabel genom tillämpning av deriveringsreglerna (sats A.11.1.1)
- skissa plana kurvor utgående från given parametrisering (A:11.3, se även A:8.2)

- bestämma parametrisering av sträckor i rummet samt cirkelbågar, ellipser och funktionskurvor i planet (A:11.3, se även A:8.2)
- beräkna kurvtangent, hastighet och accelerationsvektor samt fart (A:11.1, 11.3)
- beräkna längden av kurvor (A:11.3)
- använda räknereglerna för gränsvärden (A:12.2)
- förklara vad som menas med att funktion är kontinuerlig (A:12.2)
- definiera och beräkna partiella derivator (A:12.3)
- bestämma tangentplan och normallinje till ytan $z = f(x, y)$ (A:12.3)

För överbetyg skall du också kunna:

- bestämma parametrisering av snitt av ytor (A:11.3)
- motivera formeln för beräkning av kurvlängd (A:11.3)
- definiera begreppet gränsvärde och motivera definitionen (A:12.2)
- avgöra om en reellvärd funktion av två variabler har gränsvärde och beräkna det (A:12.2)
- avgöra om en funktion är kontinuerlig (A:12.2)
- definiera begreppet partiell derivata och härleda tangentplanets ekvation (A:12.3)

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
A.12.1	1, 3, 5, 12, **13**, **14**, 15, 17, 20, 27
A.8.2	3, 5, 7
A.11.1	1, **3**, **7**, 11
A.11.3	**1**, 2, **3**, 4, **7**, 13, 19
A.12.2	1, 2, **5**, **4**
A.12.3	1, 3, 5, 8, 11, 13, 14, 17, **19**, 25

Extra övningar

1. Rita ellipserna
   (a) $4x^2 + 9y^2 = 36$
   (b) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
2. Skissa hyperblerna
   (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$,
   (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$.
3. Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$
   (a) $M_1 = \{(x, y) : y > x^2\}$,
   (b) $M_2 = \{(x, y) : |y| \leq x^2\}$,
   (c) $M_3 = \{(x, y) : x^2 - 2x + y^2 + 4y < 4\}$,

(d) $M_4 = \{(x,y) : |y| > 1 - |x|\}$.

4. Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$

   (a) $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

   (b) $M_2 = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$,

   (c) $M_3 = \{(x,y) : \max(|x|, |y|) \leq 1\}$,

   (d) $M_4 = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 - 4y < 11\}$.

5. Rita nivåkurvorna till nedanstående funktioner. Beskriv sedan graferna geometriskt

   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$,

   (b) $f(x,y) = x + 2y - 2$,

   (c) $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 < 1$,

   (d) $f(x,y) = (1 - y^2)^{1/2}$, $|y| \leq 1$,

   (e) $f(x,y) = x$.

6. Rita kurvorna

   (a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 + 1)$, $0 \leq t \leq 2$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, -2 + \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$,

   Markera också en orientering.

7. Kurvan γ ges av

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z &= \cos 2t \end{cases}$$

   (a) Visa att kurvan ligger på ytan $z = x^2 - y^2$;

   (b) I vilka punkter har en partikel som ör sig längs γ störst fart? Betsäm denna.

8. Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{x-1}$;

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x-1}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$.

”Tjocka” uppgifter skall räknas på tavlan.