TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 15
Vecko–PM läsvecka 5

Adams: 13.3, 14.1-14.6

Innehåll: Extremvärde med bivillkor: Lagranges multiplikator metod. Dubbel- och trippelintegraler, beräkning med upprepad integrering, generaliserade dubbelintegraler, variabelsubstitution i dubbel- och trippelintegraler.

Vi fortsätter prata om extremvärde under bivillkor och ska använda Lagrange multiplikatormetod som introduceras i avsnitt 13.3. Problemet med att maximera/minimera funktioner under ett (eller flera) bivillkor omformuleras då till ett problem som innebär att man behöver lösa ett icke-linjärt ekvationssystem. Metoden har bl.a. fördelen att den lätt kan implementeras på en dator, som inte har några större problem med att numeriskt lösa sådana system. För hand kan det dock ofta vara svårt att lösa ickelinjära ekvationssytem exakt, men detta skall ställas mot svårigheterna med att parametrisera kurvor och ytor eller annan finurlig insikt som de övriga metoderna ibland kräver.

Integraler. I envariableanalys såg vi att integraler kan användas för att t.ex. beräkna areor av plana figurer eller massa av en rak tråd med varierande densitet. När man inför *dubbelintegraler* så är utgångspunkten att hitta ett matematiskt redskap med vars hjälp vi kan beräkna volyminnehållet av tredimensionella kropp. Definitioner och viktiga räkneregler finns i avsnitt 14.1. För hand beräknas ofta dubbelintegraller genom s.k. upprepad enkelintegration dvs genom två integrationer efter varandra (först i x-led och sedan i y-led, eller vice bversa) av den typ vi redan känner till från en variabel. När vi integrerade funktioner av en variable var det egentligen aldrig svårigheter med integrationsgränserna, utan vi ägnade den mesta av tiden åt olika integrationstekniker. Samma integrationstekniker kommer vi använda i flera variabler men nu är det svårare att bestämma integrationsgränserna. Om området man integrerar över inte är rektangulärt, vilket vi kommer att studera i avsnitt 14.2, så kommer integrationsgränserna m a p den ena variabel bero på den andra variabeln. Ofta kommer det då att vara till stor hjälp om man kan skissa integrationsområdet. Avsnitt 14.3 handlar om *generaliserade dubbelintegraler* och *medelvärdessatsen* för dubbelintegraler och avsnitt 14.4 handlar om *variabelsubstitution i dubbelintegraler*, där en av de viktigare substitutionerna är övergång till *polära koordinater*. Vidare i avsnitt 14.5 skall vi se hur funktioner av tre variabler kan integreras genom s.k. *trippelintegraler*. I huvudsak är det inte så stor skillnad på att integrera funktioner av två respektive tre variabler, men då integrationsområdet i en trippelintegral är ett område i rummet kan det dock ibland vara om något ännu lite klurigare att bestämma integrationsgränserna. En annan skillnad är också att vi i trippelintegraler har ännu fler möjligheter på vilken ordningsföljd vi kan integrera. Slutligen skall vi denna vecka se hur man kan göra variabelsubstitution i trippelintegraler och i avsnitt 14.6 ägnas mest fokus på övergång till s.k. *cylindriska koordinater* och *sfäriska koordinater*.

Mål: För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

- bestämma extremvärden för $f(x, y)$, eller $f(x, y, z)$ under bivillkor $g(x, y) = 0$, eller $g(x, y, z) = 0$, med Lagranges multiplikator metod då den leder till relativt enkelt ekvationssystem (13.3)
- känna till och utnyttja dubbelintegralens egenskaper (s. 794) vid problemlösning (14.1)
- beräkna dubbelintegral genom upprepad enkelintegration (sats 14.2.2)

- beräkna generaliserade dubbelintegral för $f(x, y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens (14.3)
- ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan area elementen
- ange hur ett område givet i cartesianska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt (14.4)
- känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett-ett (s.829)
- beräkna dubbelintegraler med hjälp av variabelsubstitution och tillämpning av sats 14.4.4
- beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration (14.5)
- ange sambandet mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater samt sambandet mellan volymelementen (14.6)
- beräkna trippelintegraler med hjälp av substitution (14.6)

För överbetyg skall du också kunna:

- motivera Lagranges multiplikatormetod (13.3)
- förklara vad det innebär att f är integrerbar över ett rektangulärt område i planet (s 808 och 809)
- utnyttja symmetrier vid beräkning av dubbelintegraler (se t.ex ex. 3 s 811-812) (14.1).
- formulera medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler.
- formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sid 831) (14.4).
- välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbelintegral (14.4)
- välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av trippelintegral (14.6)
- beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
A.13.3	1, **3**, **5**, 7, 9, 14
A.14.1	13, 14
A.14.2	1,3, 5, 7, **9**, 11, **13**, 15
A.14.3	3, **7**, 9, 17
A.14.4	1, 3, 7, 9, **21**, 32, **33**
A.14.5	1, 3, 5, **7**
A.14.6.	1, **11** , 12, **15**

Extra uppgifter

1. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma största och minsta avståndet från ellipsen $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$ till origo.

2. Beräkna integralen
$$\iiint_K z dx dy dz$$
där K är den kropp som begränsas av ytan $z = 2 - x^2 - y^2$ och xy-planet.

Tjocka uppgifter skall räknas på tavlan.