

TMV036c, Analys och linjär algebra, del C, vt 15

Vecko-PM läsvecka 7

Adams: 15.5, 15.6, 16.1-16.3

Innehåll: Ytintegral, flödesintegral, gradient, divergens, rotation, Greens sats/formel.

I avsnitt 15.5 skall vi definiera ytintegral: att parametrisera en yta är en viktig moment i beräkningen av ytintegraler. Vi skall se hur man med *ytintegraler* kan beräkna area, massa och tyngdpunkt av ytor. I avsnitt 15.6 introduceras flödesintegraler. Vi skall se hur man med *flödesintegral* kan beräkna hur mycket av ett visst flöde som passerar genom en given yta per tidsenhet.

Kapitel 16 handlar om några viktiga differentialoperatorer på vektorfält; **div** (*divergensen*) och **curl** (*rotationen*). Även nabla-operatorn $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ som vi stötte på redan i kapitel 12 spelar en viktig roll. Avsnitt 16.1 handlar mycket om vilken information som **div F** och **curl F** ger om ett vektorfält **F**. Man kan säga att **div F**(x, y, z) ger uttryck för hur mycket vektorfältet verkar ut från (eller in mot) punkten $P = (x, y, z)$. Om vektorfältet representerar ett flöde så kan man tänka på **div F**(x, y, z) som *källstyrkan* i punkten P dvs. hur mycket av flödet (t.ex. gas, radioaktivitet eller dyl) som "skapas/produceras" i punkten. Antag t.ex. att vi studerar flödet genom en sluten yta (t.ex. en sfär). Om det flödar mer ut ur området (som ytan begränsar) än in så måste det ju på något sätt produceras/skapas flöde inuti området dvs. finnas punkter där **div F** > 0. Om det inte sker någon källproduktion alls dvs. om **div F** \equiv 0 så sägs vektorfältet vara *källfritt*. Den andra viktiga operationen **curl F** i detta kapitel ger istället uttryck för vektorfältets tendens att virvla/rotera i en omgivning av P . Till skillnad mot **div F** (som ger ett värde) så ger **curl F** en vektor i varje punkt. Riktningen på vektorn anger den axel kring vilket vektorfältet roterar mest. Om **curl F** \equiv **0** så sägs vektorfältet vara *virvelfritt* (se anteckningar från föra veckan).

Avsnitt 16.2 innehåller en del räknelagar för ovanstående differentialoperatorer samt några resultat som knyter an till vad vi delvis jobbade med i kapitel 15. Bl.a. är det så att om ett vektorfält är virvelfritt i ett enkelt sammanhängande område så är det också konservativt där.

Avsnitten 16.3-5 handlar om tre viktiga satser (Greens, Gauss's resp Stokes sats) som har stort teoretiskt intresse och är av central betydelse inom många områden/tillämpningar, inte minst för att analysera och lösa partiella differentialekvationer. Det huvudsakliga innehållet i satserna beskrivs av formler som knyter samman mycket av det vi arbetat med under del 2 av kursen;

$$\oint_{\partial D} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \quad (\text{Greens formel})$$

$$\iiint_K \mathbf{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (\text{Gauss's formel})$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (\text{Stokes's formel})$$

Mål: För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

- definiera begreppet ytintegral av en funktion över en yta och beräkna sådana integraler då ytan är en parametriserad yta eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera (15.5)
- definiera begreppet flödesintegral och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera. (15.5.6)
- beräkna divergens, $\operatorname{div}\mathbf{F}$, och rotation, $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ för ett vektorfält \mathbf{F} (16.1)
- formulera sats 16.1.1 om divergensen som flödestäthet
- formulera sats 16.1.2 om rotationen som virveltäthet
- definiera begreppet källfritt (solenoidal) och virvelfritt (irrotational) vektorfält (16.2)
- tillämpa sats 16.2.4.

För överbetyg skall du också kunna:

- motivera definitionerna av begreppen kurvintegral av funktion/vektorfält, ytintegral av en funktion och flödesintegral (till exempel genom att ge exempel på tillämpning och förklaring av varför integraltypen kan utnyttjas i exemplet).
- formulera och tillämpa Greens formel (16.3.6)

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Uppgifter
A.15.5	3, 7, 9
A.15.6	1, 3, 7
A.16.1	1, 3
A.16.2	3, 5
A.16.3	1, 2, 3, 5

Extra uppgifter.

1. Rita i grova drag med angivande av orientering kurvan

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t(1 - t^2) \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Beräkna arean av det området kurvan omslutar.

2. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy$$

där γ är halvcirkeln $(2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. (Tips: Slut kurvan på lämpligt sätt och använd Greens sats.)