Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 16/8-05

1. (a) Eftersom funktionen är udda är serien av formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

där

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

I vårt fall får vi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

dvs vi har $b_n = 0$ om n är jämnt och $b_n = 4/(n\pi)$ om n är udda. Detta ger

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

(b) Parsevals formel ger för udda funktioner

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

I detta fall ger detta

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\pi = 2$$

vilket i sin tur leder till

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. (a) Karakteristiska ekvatione $r^2 - 5r + 6 = 0$ har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$ .Alltså har motsvarande homogena ekvation den allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_n^p = a$ som insatt i differensekvationen leder till $a-5a+6a = 1$ som alltså inträffar då $a = 1/2$. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är därför

$$y_n = \frac{1}{2} + A\cdot 2^n + B\cdot 3^n$$

och det som återstår är att få villkoren på y_0 och y_1 uppfyllda. Dessa leder till $0.5 + A + B = 1$ respektive $0.5 + 2A + 3B = 0$ vilket inträffar precis då $A = 2$ och $B = -1.5$. Lösningen är alltså

$$y_n = 0.5 + 2^{n+1} - 1.5\cdot 3^n.$$

(b) Vid z-transformering övergår ekvationen i

$$z^2Y(z) - z^2 - 5(zY(z) - z) + 6Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

dvs

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = \frac{z}{z-1} + z^2 - 5z$$

och alltså

$$Y(z) = z\cdot\frac{z^2 - 6z + 6}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger nu

$$Y(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + 2\cdot\frac{z}{z-2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-3}$$

vilket leder till

$$y_n = 0.5 + 2^{n+1} - 1.5\cdot 3^n.$$

3. (a) Låt

$$a_k = \frac{x^k}{2^k + k^2}.$$

Då gäller

$$|a_k|^{1/k} = \frac{|x|}{2} \cdot \frac{1}{(1 + k^2 2^{-k})} \to \frac{|x|}{2}$$

när $k \to \infty$. Enligt rotkriteriet är därför serien konvergent om $|x| < 2$ och divergent om $|x| \geq 2$. Alltså är konvergensradien 2.

(b) Låt nu

$$a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k.$$

Då gäller

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} |x|^{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{|x|^k} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \cdot |x| = \frac{(k+1)}{2(2k+1)} \cdot |x| \to \frac{|x|}{4}$$

Enligt kvotkriteriet är därmed serien konvergent om $|x| < 4$ och divergent om $|x| > 4$. Konvergensradien är därför 4.

4. (a) Vi får enligt definition av laplacetransform

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^1 (1-t) e^{-st}\, dt.$$

Partiell integration ger då

$$F(s) = \left[(1-t)(-\frac{e^{-st}}{s}) \right]_0^1 - \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s} - 1}{s^2}$$

dvs

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s}$$

(b) Laplacetransformering av ekvationen leder till

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = F(s)$$

som ger

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2(s^2+1)} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} \cdot e^{-s} + \frac{s}{s^2+1}.$$

(c) Eftersom

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

kan $Y(s)$ skrivas

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2} - \frac{s-1}{s^2+1} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \right) \cdot e^{-s} + \frac{s}{s^2+1}$$

dvs

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \right) \cdot e^{-s}$$

som ger

$$y(t) = t - t^2 + \sin t + (t - 1 - \sin(t-1)) u_1(t).$$

5. (a) Låt

$$u_k(x) = \frac{\cos kx}{k^2+1} + \frac{\sqrt{k} \sin kx}{k^2+1}.$$

Då gäller för alla x att

$$|u_k(x)| \leq \frac{1+\sqrt{k}}{k^2+1} < \frac{2\sqrt{k}}{k^2} = \frac{2}{k^{3/2}}.$$

Serien $\sum_{k=1}^\infty 2 \cdot k^{-3/2}$ är konvergent eftersom $3/2 > 1$ och därför ger Weierstrass majorantsats att serien $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$ är likformigt konvergent på hela reella axeln. Därmed är funktionen definierad och kontinuerlig för alla reella x eftersom varje term är kontinuerlig.

(b) Om funktionen vore kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ så skulle vi kunna använda Parsevals formel och få att

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

Speciellt skulle vi då ha $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$. Men

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^2}$$

och den senare serien är divergent eftersom den jenom jämförelsekriteriet på gränsvärdesform är jämförbar med den divergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty}$. Slutsatsen är alltså att det inte finns någon sådan kontinuerlig funktion.

6. (b)

$$f \star g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du = \int_0^t e^{t-u}e^{2u}\,du = \int_0^t e^{t+u}\,du = \left[e^{t+u}\right]_0^t = e^{2t} - e^t.$$

(d) Laplacetransformerna av f och g är

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \text{ respektive } G(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Faltningen $f \star g$ har enligt (c) transformen $F(s)G(s)$ men

$$F(s)G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \subset e^{2t} - e^t.$$

7. Vi använder z-transformen och faltningssatsen för denna och får

$$z^2Y(z) - z^2 + 2 \cdot \frac{z}{z-2} \cdot Y(z) = 0.$$

Detta leder till

$$Y(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 2z + 2}.$$

Vi observerar att nämnaren saknar reella nollställen så vi försöker uppfatta den på formen

$$z^2 - 2\beta z \cos\alpha + \beta^2.$$

Detta fungerar med $\beta = \sqrt{2}$ och $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ dvs t ex $\alpha = \pi/4$. Med dessa val ger formelsamlingen

$$\frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 2} \subset (\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4}$$

och

$$\frac{z}{z^2 - 2z + 2} \subset (\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4}.$$

Omskrivningen

$$Y(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 2z + 2} = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 2} - \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$$

ger

$$y_n = (\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^n \sin n\frac{\pi}{4}$$