Tentamen i Matematiska metoder fk, E2, del A, TMA980a

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
Finn ON-baser för nollrummet $N(A)$ och värderummet $V(A)$. (4+4p)

2. Bestäm med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = kx + \ell$ till punkterna (x, y) där $(x, y) = (1, 2),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (4, 1)$, respektive $(5, 3)$. (8p)

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$
Bestäm en ortogonalmatris Q och en diagonalmatris Λ så att $Q^T AQ = \Lambda$.
(8p)

4. Visa att en Hermitesk matris har endast reella egenvärden. (8p)

5. Finn för matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
om möjligt, en faktorisering $A = QR$ där Q är ortogonal. Finn även matrisen P för ortogonalprojektion på värderummet $V(A)$. (8p)

6. Låt A vara en reell, symmetrisk $n \times n$-matris sådan att A är positivt definit, dvs $\langle Ax, x\rangle > 0$, $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbf{R}^n$. Antag vidare att $\|Ax\| \leq \|x\|$. Visa att då gäller $\|(A^3 - 2A)x\| \leq \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\|x\|$. (10p)

VA