1. Vi ser att $U_i = N(A_i) = \{x \in \mathbb{R}^4 : A_i x = 0\}$, $i = 1, 2$, och $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Radreduktion $\Rightarrow A_1 \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ så $A_1 x = 0$ har lösn. $x = s_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vidare ser vi pss att $A_2 x = 0$ har lösn. $x = s_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dvs en bas för U_1 ges av $(2, 1, 2, 0)$ och $(0, 1, 0, 2)$ och en bas för U_2 ges av $(5, 2, -2, 0)$ och $(0, 2, 0, 1)$. Därför är då $U_1 + U_2 =$ spannet av alla dessa (bas)-vektorer$= V(A)$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Så en bas för $U_1 + U_2$ ges av $\{(2, 1, 2, 0), (0, 1, 0, 2), (5, 2, -2, 0)$ och $(0, 2, 0, 1)\}$.

---

2. Låt $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$. Gram-Schmidt $\Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_2 = 1/\sqrt{2}$, $q_2^T a_2 = -3/\sqrt{6}$. Vidare: $\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_3 = 0 \quad q_2^T a_3 = -2/\sqrt{6}$. Vidare är $q_3^T a_3 = 1/\sqrt{3}$ $\therefore A = QR$ där $Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 \\ 0 & q_2^T a_2 & q_2^T a_3 \\ 0 & 0 & q_3^T a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ & -3/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ & & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Nu är $P = q_1 q_1^T + \ldots + q_3 q_3^T$ och också $P = A(A^T A)^{-1} A^T = A(R^T Q^T Q R)^{-1} A^T = A(R^T R)^{-1} A^T$. I vilket fall som så får vi $P = I$ som också inses av att A har tre lin. ober. kolonner så $V(A)$ 3-dim underrum av $\mathbb{R}^3$, så $V(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow P = I$.

---

3. i) Låt $v_1,\ v_2 \in U^\perp$, dvs $\langle v_i, u \rangle = 0,\ \forall u \in U$. Då gäller $\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u \rangle = \alpha \langle v_1, u \rangle + \beta \langle v_2, u \rangle = 0$ så $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U^\perp$ och sats $\Rightarrow U^\perp$ underrum. ii) Antag $v \in U \cap U^\perp \Rightarrow v \in U$ och $\langle v, u \rangle = 0,\ \forall u \in U$. Speciellt gäller då $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \therefore U \cap U^\perp = \{0\}$.