1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ccc} \boxed{-1} & \boxed{-3} & \boxed{-2} \\ \leftarrow & & \\ & \leftarrow & \\ & & \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{A}$

   $\therefore$ Kolonnerna 1 & 2 i den radreducerade matrisen innehåller pivotelement $\Rightarrow$ kolonn 1 och 2 i den ursprungliga matrisen A utgör en bas för $V(A)$. Vi löser ekvationssystemet som med fria variabler $x_3 = s,\ x_4 = t$ har lösning $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket ges av att $\tilde{A} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\tilde{A}}$ så en bas för $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ \tilde{\tilde{A}}x = 0\}$ ges av $\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

2. Insättning av punkterna ger ekv.syst. $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 2 \\ a + 2b = 3 \\ a + 3b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Lösningen till $Ax = b$ i minstakvadratmetodens mening är lösning x till $A^t Ax = A^t b \Leftrightarrow$

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

   $\begin{cases} a = 11/7 \\ b = 8/7 \end{cases} \Rightarrow$ sökt linje : $y = \frac{11}{7} + \frac{8}{7}x$.

---

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \boxed{3/2} & \boxed{-2} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \boxed{3} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \equiv DU.$

   Från gjorda redoperationer ses nu att $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -3/2 & 1 & \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (Kolla: $A = LDU$!!!)

---

4. λ egenvärde och x egenvektor till $A \Leftrightarrow Ax = \lambda x$ och $x \neq 0$. Då A Hermitesk, dvs $A^H = A$, får vi $\lambda x^H x = x^H(\lambda x) = x^H Ax = x^H A^H x = (Ax)^H x = (\lambda x)^H x = \bar{\lambda} x^H x$. Då $x^H x = \|x\|^2 > 0$ får vi $\lambda = \bar{\lambda}$, dvs λ reell.

---

5. Punkterna i planet är lösningar till ekv. (-syst.) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ som med de fria variablerna $x_2 = s$ och $x_3 = t$ kan skrivas $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{s}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, dvs planet $= V(A)$ där $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Projektionsmatrisen för ortogonalprojektion på $V(A)$ är $P = A(A^T A)^{-1} A^T$. Nu är $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ så det ses lätt att $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{126} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$\ldots = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$. <u>Alternativ metod</u>: Låt A vara matrisen för ortogonalprojektion på planet. Normalvektor till planet är $\vec{n} = (3,2,1) \Rightarrow A\vec{n} = 0$. Vidare är för vektorer v i planet $Av = v$. Två vektorer i planet är t.ex. $v_2 = (1,-1,-1)$, $v_3 = (0,1,-2)$. Då gäller med $v_1 = \vec{n}$ att $Av_1 = 0$, $Av_2 = v_2$, $Av_3 = v_3$ dvs $A\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ 0 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ dvs $AB = C$ där $B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. $\therefore A = CB^{-1}$ där B^{-1} beräknas med Gauss-Jordan $\Rightarrow$

$B^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$.

---

6. Samtidig diagonalisering kan användas där sökt minimum $\gamma = \min_{\{x:\ x^T Mx=1\}} x^T \tilde{A} x$ där $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ och $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Då M pos. definit $\exists R$ s.a. $M = R^t R$ och med $C = R^{-1}$ fås $\gamma = \min_{y^t y=1} y^t(C^t AC)y$ där $y = Rx$. Det sökta γ är nu det minsta av egenvärdena för $C^t AC$. I stället för att finna R (mha LDU-faktorisering av M) använder vi en rättfram metod för uppgiften.

$9x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow x^t Ax = 5$ där $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ som har egenvärden $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$ med tillhörande egenvektorer $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diagonalisera A med ON-matris $Q = \begin{pmatrix} | & | \\ e_1 & e_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ så att $Q^t AQ = \Lambda \equiv \begin{pmatrix} 5 & \\ & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 5 = x^t QQ^t AQQ^t x = x^t Q\Lambda Q^t x = (Q^t x)^t \Lambda Q^t x$. Variabelbytet $\xi = Q^t x \Rightarrow 5 = \xi^t \Lambda \xi = 5\xi_1^2 + 10\xi_2^2 \Leftrightarrow 1 = \xi_1^2 + (\sqrt{2}\xi_2)^2$. Ytterligare variabelbyte $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \sqrt{2}\xi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = \eta_1^2 + \eta_2^2 \Rightarrow x = Q\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \xi_1 - 2\xi_2 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}$,

$\therefore 6x_1^2 - 4x_2^2 = 6(\frac{\xi_1 - 2\xi_2}{\sqrt{5}})^2 - 4(\frac{2\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{5}})^2 = -2\xi_1^2 + 4\xi_2^2 - 8\xi_1\xi_2 = -2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\eta_1\eta_2 = \eta^t B\eta$ där $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -2 & -4/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ vars kar.ekv. ger $0 = \det(B - \lambda I) = (-2-\lambda)(2-\lambda) - 16/2 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 8 = \lambda^2 - 4 - 8 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$, $\therefore \gamma = \min_{\eta^t\eta=1} \eta^t B\eta = \min\{\pm 2\sqrt{3}\} = -2\sqrt{3}$