MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Robert Berman, 0740-459022
2001–10–26 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Matematiska metoder fk, E2/Ex, del A, TMA980a/TMA215

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Bestäm med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = kx + \ell$ till punkterna (x, y) där $(x, y) = (0, 1),\ (1, 3),\ (2, 4)$, respektive $(3, 4)$. (8p)

2. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T AQ$, där $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. (8p)

3. Bestäm en bas för värderummet $V(A)$ och en bas för nollrummet $N(A)$, där A är matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$
(9p)

4. Finn en lösning till följande system av differentialekvationer,
$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases},$$
sådan att $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = -1$. (8p)

5. Låt $V = \mathbf{R}^2$ och låt addition, $\bigoplus$, och skalärmultiplikation, $\bigodot$, på mängden V vara för $\mathbf{u} = (u_1, u_2),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in V$ och α skalär, (dvs reellt eller komplext tal), givna av $\mathbf{u} \bigoplus \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ respektive $\alpha \bigodot \mathbf{u} = (\alpha u_1, 0)$. Uppgift: **a)** Kan skalärerna vara komplexa tal? **b)** Bevisa eller motbevisa påståendet att mängden V med denna addition och skalärmultiplikation är ett vektorrum. (2+6p)

6. Låt A vara en $n \times n$-matris given i standardbasen för $\mathbf{R}^n$. Visa att
   a) om A' är matrisen för A, (eller mer precist, matrisen för den linjära avbildning $F(x) = Ax$ som ges av A), i en annan bas för $\mathbf{R}^n$ än standardbasen, så har A och A' samma egenvärden.
   b) om λ är ett egenvärde för A så är mängden av egenvektorer för detta egenvärde ett underrum i $\mathbf{R}^n$, egenvärdesrummet för λ.
   c) om λ är ett egenvärde för A av multiplicitet ett, dvs ett enkelt nollställe till den karakteristiska ekvationen för A, så är egenvärdesrummet för λ 1-dimensionellt.

   (2+2+5p)

VA