Tentamen i Matematiska metoder fk, E2/Ex, del A, TMA980a/TMA215

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt $U = V(A)$, (värderummet eller om man så vill kolonnrummet till A), där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
och bestäm en bas för U. Bestäm även $U^{\perp}$, ortogonala komplementet av U. (6+2p)

2. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att
$\Lambda = Q^T AQ$, där $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (9p)

3. Låt U_1 och U_2 vara två underrum i $\mathbf{R}^4$ givna av
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$
Finn en bas för $U_1 + U_2 = \{u + v : \ u \in U_1, \ v \in U_2\}$. (8p)

4. Antag att $u_1, \dots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V och att $v \in V$ ej tillhör det underrum U som genereras av $u_1, \dots, u_m$. Visa att $u_1, \dots, u_m, v$ är linjärt oberoende. (8p)

5. Finn för matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
om möjligt, en faktorisering $A = QR$ där Q är ortogonal. Finn även matrisen P för ortogonalprojektion på värderummet $V(A)$. (8p)

6. Låt A vara en $n \times n$-matris given i standardbasen för $\mathbf{R}^n$. Visa att
   a) om A' är matrisen för A, (eller mer precist, matrisen för den linjära avbildning $F(x) = Ax$ som ges av A), i en annan bas för $\mathbf{R}^n$ än standardbasen, så har A och A' samma egenvärden.
   b) om λ är ett egenvärde för A så är mängden av egenvektorer för detta egenvärde ett underrum i $\mathbf{R}^n$, egenvärdesrummet för λ.
   c) om λ är ett egenvärde för A av multiplicitet ett, dvs ett enkelt nollställe till den karakteristiska ekvationen för A, så är egenvärdesrummet för λ 1-dimensionellt.

(2+2+5p)

VA