1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{1/2} \\ \\ \end{array}$

$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{1} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ Kolonn 1, 2, 4 & 5 i A är en bas för $V(A) \subseteq \mathbb{R}^4 \therefore V(A) = \mathbb{R}^4$. För lösningen har vi att $Ax = 0 \Leftrightarrow x_5 = 0, x_4 = 0, x_3 = t, x_2 = 2t, x_1 = -t \Rightarrow$ $x = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N(A) = \text{span}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$. Då $V(A) = \mathbb{R}^4$ så blir matrisen för ortogonalprojektion på $V(A)$, identitetsmatrisen I.

---

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ och vi ser att vi behöver byta rader vilket vi gör initialt. Byte rad 2 och 3 ger $P = PI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ där P är permutationsmatrisen som byter rad 2 och rad 3. Vi får

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$\therefore PA = LDU \quad \text{där} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned} x \in N(A) &\Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \perp \text{ raderna i } A \\ &\Leftrightarrow x \perp \text{ kolonnerna i } A^T \\ &\Leftrightarrow x \perp \text{ span } \{\text{kolonnerna i } A^T\} \\ &\Leftrightarrow x \perp V(A^T) \Leftrightarrow x \in V(A^T)^{\perp} \end{aligned}$$