1. Överbestämt ekv.syst. att lösa är $A\binom{k}{\ell} = b$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Nu är $A^TA = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$ och $A^Tb = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$.

---

2. Egenvärden ges av: $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8-\lambda & 8-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 8$.

Egenvektorer: $\lambda_{1,2} = 2 : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_0 = 8 : \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi vill ha ortogonalmatrix för basbytet som gör $A$ diagonal men $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ej ortogonala. Vi kan använda Gram-Schmidt men enklare i detta fall är, då ju $A$ är symmetrisk, att välja $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $e_2 = e_1 \times e_3 \perp e_1$ och $e_3$ och $\{e_1, e_2\}$ bas för egenvärdesrummet för $\lambda_{1,2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\therefore Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$.

---

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \boxed{-2}\ \boxed{1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \qquad\leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ \leftarrow \\ \\ \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \boxed{2}\ \boxed{-5} \end{array} \overset{RE}{\sim}$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{-4} \\ \\ \\ \end{array} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -14 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = s \\ x_4 = t \\ x_6 = u \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + u\underbrace{\begin{pmatrix} 37 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3}$

$\therefore \{e_1, e_2, e_3\}$ bas för $N(A) \subseteq R^6$ och pivotelement i kolonn 1, 3 och 5 $\Rightarrow$ bas för $V(A)$ ges av $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

---

4. Systemet av (ordinära) differentielekvationer går att formulera som $\frac{dx}{dt} = Ax,\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ där $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Egenvärdena för $A$ ges av $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((1-\lambda)(5-\lambda)-1) - 2(2(5-\lambda)-0) = (5-\lambda)((1-\lambda)(5-\lambda)-1-4) = (5-\lambda)\lambda(\lambda-6) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 6$. Egenvektorer: $\lambda_1 = 0 : \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-2} \\ \phantom{0} \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 5 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ Pss fås egenvektorn för $\lambda_3 = 6$ men kan också fås, då ju $A$ symmetrisk, av $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore x(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}e^{5t} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{6t}$ och $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = -3/10,\ c_2 = 3/5,\ c_3 = 1/2$

---

5. Om $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ så gäller att $\alpha u \notin \mathbb{R}^2$ för $u \in \mathbb{R}^2$ så för $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ är skalärmult. ej sluten på $V = \mathbb{R}^2$. Alltså är $(V, \oplus, \odot)$ ej ett vektorrum för komplexa skalärer. Om $\alpha$ är reellt så noterar vi att för $u = (u_1, u_2) \in V$ gäller $1 \odot u = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u$ om $u_2 \neq 0$. Så $(v, \oplus, \odot)$ ej vektorrum ens för reella skalärer.

---

6. a) $\exists$ inverterbar matris $T$ s.a. $T^{-1}AT = A' \Rightarrow \det(A' - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda I) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \det T^{-1}\det(A - \lambda I)\det T = (1/\det T)\det(A - \lambda I)\det T = \det(A - \lambda I)$ vilket visar att egenvärdena för $A$ och $A'$ är desamma.

b) Då för skalärer $\alpha, \beta$ och egenvektorer $u, v$ för egenvärdet $\lambda$, vi har att $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = \alpha\lambda u + \beta\lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$ ser vi att $\alpha u + \beta v$ är egenvektor för $\lambda$. Dvs egenvärdesrummet för $\lambda$ är ett linjärt rum.

c) Antag att dimensionen av egenvärdesrummet för $\lambda \geq 2$. Då finns minst två lin. ober. egenvektorer $e_1$ och $e_2$ för $\lambda$, dvs $Ae_i = \lambda e_i,\ i = 1, 2$. Komplettera till en bas $e \equiv \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ för $\mathbb{R}^n$. I denna bas $e$ har $A$ representationen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Ae_1 & Ae_2 & \ldots & Ae_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \approx{a}_{1,1} & \ldots & \approx{a}_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \approx{a}_{n-2,1} & \ldots & \approx{a}_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$$

Egenvärdena $\tilde{\lambda}$ för $\tilde{A}$ ges av $0 = \det(\tilde{A} - \tilde{\lambda}I) = \begin{vmatrix} \lambda - \tilde{\lambda} & & \\ & \lambda - \tilde{\lambda} & \\ & & \boxed{\approx{A} - \tilde{\lambda}I} \end{vmatrix} = (\lambda - \tilde{\lambda})^2\det(\approx{A} - \tilde{\lambda}I) \Rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda$ är ett egenvärde av multiplicitet minst 2, vilket är en motsägelse.