1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1/2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-3} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv U$

$\therefore A = LU$ där $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

---

2. Gram-Schmidt $\Rightarrow$ ON-bas för U. Låt $\tilde{q}_1 = u_1, \tilde{q}_2 = u_2 - ((u_2 \cdot \tilde{q}_1)/|\tilde{q}_1|^2)\tilde{q}_1 = (1,1,-2) - \frac{(-5)}{5}(-1,0,2) = (0,1,0)$ $\quad \therefore q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är en ON-bas för U. Projektion av v på U ger

$$\mathrm{Proj}_U(v) = (v \cdot q_1)q_1 + (v \cdot q_2)q_2 = \frac{10}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = v$$

Dvs $v \in U$ så $v = v + 0$ där $v \in U$, $0 \in U^{\perp}$, är den sökta summan. <u>Alternativ:</u> Projektionsmatrisen $P = A(A^TA)^{-1}A^T = \ldots = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, så $Pv = \ldots = v \in U$ där $U = V(A)$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

---

3. $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 \Rightarrow$ egenvärden: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 2$ och egenvektorer ges av:

$$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \neq 0,\ \text{egenvekt.}$$

$$\lambda_{2,3} = 2: \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ st \neq 0,\ \text{egenvekt.}$$

Välj för $\lambda = 2$ egenvektorn $(1,-1,0)$. Ytterligare egenvektor måste dels uppfylla $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ men vi vill också välja den ortogonal mot $(1,-1,0)$ dvs $0 = x \cdot (1,-1,0) = x_1 - x_2$. Lös alltså

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Efter normering får vi egenvektorer: $\lambda_1 = -1 : (1,1,1)/\sqrt{3}$, $\lambda_{2,3} = 2 : (1,-1,0)/\sqrt{2}, (1,1,-2)/\sqrt{6}$

$$\therefore Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ och } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan den andra egenvektorn för $\lambda = 2$ fås genom $(1,1,1) \times (1,-1,0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-2)$.

---

4. Insättning av t och motsvarande h i $h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ ger ekv. syst. $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 45 \\ 80 \\ 105 \\ 120 \end{pmatrix}$. Lösning i minstakvadratmening fås som lösning till $A^T A x = A^T b$.

$$A^T A = \ldots = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 350 \\ 1000 \\ 3230 \end{pmatrix}.$$

Gausselimination ger $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 30 & 350 \\ 10 & 30 & 100 & 1000 \\ 30 & 100 & 354 & 3230 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 2 & 5 & 15 & 175 \\ 30 & 100 & 354 & 3230 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{-2} \\ \leftarrow \\ \end{array} \begin{array}{c} \boxed{-30} \\ \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim}$
$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 0 & -1 & -5 & -25 \\ 0 & 10 & 54 & 230 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{10} \\ \leftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{1/4} \end{array} \begin{array}{c} \\ \leftarrow \\ \boxed{-5} \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$

$\Rightarrow a_1 = v = 50, a_2 = -\frac{1}{2} g = -5 \Rightarrow g = 10.$

---

5. För a): Då $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = 0, \forall u \in U\}$ får vi för $u \in U$ och $x \in U^\perp$ att $u \cdot x = 0$, dvs $u \perp x$, $\forall x \in U^\perp$, dvs $u \in (U^\perp)^\perp$ $\therefore U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Tag nu godtyckligt $u \in (U^\perp)^\perp$ som då kan skrivas $u = u' + u''$ där $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$ $\therefore 0 = u \cdot u'' = u' \cdot u'' + u'' \cdot u'' = \|u''\|^2 \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = u' \in U$ $\therefore (U^\perp)^\perp \subseteq U$ $\therefore (U^\perp)^\perp = U$.

   b) $x \in (V+W)^\perp \Leftrightarrow 0 = x \cdot (v + w)$, $\forall v \in V w \in W$ speciellt gäller $0 = x \cdot v$ och $0 = x \cdot w$, dvs $x \in V^\perp$ och $W^\perp$ dvs $x \in V^\perp \cap W^\perp$ så $(V+W)^\perp \subseteq V^\perp \cap W^\perp$. Omvända inklusionen på liknande men enklare sätt.

   c) Applicera b) på $V^\perp$ och $W^\perp$ $\Rightarrow$ $(V^\perp + W^\perp)^\perp = (V^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp$ och a) $\Rightarrow$ $V^\perp + W^\perp = (V^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} = ((V^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp)^\perp = (V \cap W)^\perp$.

---

6. Klart att $\{1, x, x^2, x^3\}$ spänner $\mathcal{P}_3$. För att se lin. obero. antag $0 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Välj $x = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3x_3 x^2$ och derivation och sätta $x = 0$ igen $\Rightarrow \alpha_1 = 0$. Ytterligare derivationer $\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dvs $\{1, x, x^2, x^3\}$ lin. ober. $\therefore$ de är en bas. Alla baser har samma antal element så $k = 3$. Gram-Schmidt $\Rightarrow$ en bas ges av $q_0 = 1$, $q_1 = x - \frac{\langle x, q_0 \rangle}{\|q_0\|^2} q_0 = x$, $q_2 = \ldots = \frac{1}{3}(3x^2 - 1)$, $q_3 = \ldots = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x)$.