1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-1} & \boxed{-3} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Så kolomnerna 1, 2 och 4 i A utgör en bas för $V(A)$, dvs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ är en bas för $V(A) \subseteq \mathbb{R}^3$. Alltså är $V(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow V(A)^\perp = \{0\}$.

---

2. Egenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$
$= -\lambda(\lambda^2 - 9) \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3.$

Egenvektorer: $\lambda_1 = -3 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 0 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim}$
$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \therefore Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $\Lambda = Q^T A Q = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

---

3. Vi ser att $U_i = N(A_i) = \{x \in \mathbb{R}^4 : A_i x = 0\}$ $i = 1, 2$ och $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_1 \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ så $A_1 x = 0$ har lösn. $x = s_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vidare ser vi pss att $A_2 x = 0$ har lösn. $x = s_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dvs en bas för U_1 ges av (2, 1, 2, 0) och (0, 1, 0, 2) och en bas för U_2 ges av $(5, 2, -2, 0)$ och (0, 2, 0, 1). Därför är då $U_1 + U_2$ = spannet av alla dessa (bas)-vektorer=$V(A)$

där $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

så en bas för $U_1 + U_2$ ges av (2, 1, 2, 0), (0,1, 0, 2), (5, 2, -2, 0) och (0, 2, 0, 1).

---

4. Antag motsatsen till det som ska visas, dvs antag att $u_1, \ldots, u_m, v$ linjärt beroende. Då gäller $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta v = 0$ där inte alla av $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ är 0. Antag att $\beta \neq 0$. Då gäller att $v = -\frac{1}{\beta}(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) \in$ spannet $\{u_1, \ldots, u_m\} \equiv U$, i strid med förutsättning i uppgiften. Alltså måste $\beta = 0 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m + 0 \cdot v = 0$, dvs $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$. Då inte alla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ är noll men $\beta = 0$ så är alltså ej alla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ noll. Dvs vi har $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$ men alla α_i är ej 0. Alltså är ej $u_1, \ldots, u_m$ linjärt oberoende i strid med förutsättning. Alltså var vårt antagande fel, vilket avslutar beviset.

---

5. $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ Gram-Schmidt $\Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_2 = 1/\sqrt{2}$, $q_2^T a_2 = -3/\sqrt{6}$. Vidare är $\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_3 = 0$, $q_2^T a_3 = -2/\sqrt{6}$. Vidare är $q_3^T a_3 = 1/\sqrt{3}$ $\therefore A = QR$ där $Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ och

$R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 \\ 0 & q_2^T a_2 & q_2^T a_3 \\ 0 & 0 & q_3^T a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ & -3/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ & & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Nu är dessutom $P = q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + q_3 q_3^T$ och också $P = A(A^T A)^{-1} A^T = A(R^T Q^T Q R)^{-1} A^T = A(R^T R)^{-1} A^T$. I villket fall som så får vi $P = I$; som också, lättare, inses av att A har tre lin. ober. kolonner så $V(A)$ är 3-dim. underum i $\mathbb{R}^3$ så $V(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow P = I$.

---

6. a) $\exists$ inverterbar matris T s.a. $T^{-1} A T = A' \Rightarrow \det(A' - \lambda I) = \det(T^{-1} A T - \lambda I) = \det(T^{-1}(A - \lambda I) T) = \det T^{-1} \det(A - \lambda I) \det T = (1/\det T) \det(A - \lambda I) \det T = \det(A - \lambda I)$ vilket visar att egenvärdena för A och A' är desamma.

   b) Då för skalärer α, β och egenvektorer u, v för egenvärdet λ, vi har att $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v = \alpha \lambda u + \beta \lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$ ser vi att $\alpha u + \beta v$ är egenvektor för λ. Dvs egenvärdesrummet för λ är ett linjärt rum.

   c) Antag att dimensionen av egenvärdesrummet för $\lambda \geq 2$. Då finns minst två lin. ober. egenvektorer e_1 och e_2 för λ, dvs $A e_i = \lambda e_i,\ i = 1, 2$. Komplettera till en bas $e \equiv \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ för $\mathbb{R}^n$. I denna bas e har A representationen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Ae_1 & Ae_2 & \ldots & Ae_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{a}}_{1,1} & \ldots & \tilde{\tilde{a}}_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{a}}_{n-2,1} & \ldots & \tilde{\tilde{a}}_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$$

Egenvärdena $\tilde{\lambda}$ för $\tilde{A}$ ges av $0 = \det(\tilde{A} - \tilde{\lambda} I) = \begin{vmatrix} \lambda - \tilde{\lambda} & & \\ & \lambda - \tilde{\lambda} & \\ & & \boxed{\tilde{\tilde{A}} - \tilde{\lambda} I} \end{vmatrix} = (\lambda - \tilde{\lambda})^2 \det(\tilde{\tilde{A}} - \tilde{\lambda} I) \Rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda$ är ett egenvärde av multiplicitet minst 2, vilket är en motsägelse.