Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Alexander Herbertsson, 0740-459022
2002–10–25 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Mat. met. fk, E2/Ex, del A, TMA980a/TMA215/TMV065

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Finn en bas för värderummet $V(A)$. Finn även de $v \in \mathbf{R}^3$ sådana att $v \in V(A) \cap N(A)$, där $N(A)$ är nollrummet för matrisen A. (6p)

2. Lös i minstakvadratmetodens mening det överbestämda ekvationssystemet $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$. (6p)

3. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T AQ$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. (7p)

4. Finn för matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
QR-faktoriseringen $A = QR$ där Q är ortogonalmatris och R uppåt triangulär matris. (6p)

5. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 4e^{2t} \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 2e^{2t} \end{cases}$. (6p)

6. Låt $M_{2\times 2}$ vara rummet av reella 2×2-matriser och låt $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ vara den linjära avbildningen $T(M) = M^t$, där M^t betyder transponatet av M. Finn matrisen A för T i någon bas för $M_{2\times 2}$ och avgör om denna matris är diagonaliserbar eller ej. Finn dessutom baser för egenvärdesrummen för T samt beräkna e^{tA} där $t \in \mathbf{R}$. (6p)

7. Visa att en Hermitesk matris har endast reella egenvärden. (6p)

8. Låt A vara en $m \times n$-matris. Visa att: A har linjärt oberoende kolonnvektorer $\Leftrightarrow A^T A$ är inverterbar. (7p)

VA