

Tentamen i Mat. met. fk, E2/Ex, del A, TMA980a/TMA215/TMV065

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Finn baser för värderummet $V(A)$ samt nollrummet $N(A)$. Finn även de $v \in \mathbf{R}^3$ sådana att $v \in V(A) \cap N(A)$. (7p)

2. Finn om möjligt för matrisen A en faktorisering $PA = LDU$ där P är en permutationsmatris, L och U nedåt respektive uppåt triangulära matriser med ettor på diagonalen och D är en diagonalmatris. Här är $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. (6p)

3. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T A Q$, där $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. (7p)

4. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 4x_3(t) \end{cases}$ (6p)

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Förklara varför A ej kan diagonaliseras. Finn en unitär matris U och en (uppåt) triangulär matris T sådana att $U^{-1}AU = T$. (6p)

6. Beräkna e^{tA} om

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6p)$$

7. Visa att en Hermiteska matris har endast reella egenvärden. (6p)

8. Låt U vara ett underrum i \mathbf{R}^n . Visa att $(U^\perp)^\perp = U$. (6p)