Tentamen i Mat. met. fk, E2/Ex, del A, TMA980a/TMA215/TMV065

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Finn baser för värderummet $V(A)$ samt nollrummet $N(A)$. Finn även de $v \in \mathbf{R}^3$ sådana att $v \in V(A) \cap N(A)$. (7p)

2. Finn om möjligt för matrisen A en faktorisering $PA = LDU$ där P är en permutationsmatris, L och U nedåt repektive uppåt triangulära matriser med ettor på diagonalen och D är en diagonalmatris. Här är $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. (6p)

3. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T AQ$, där $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. (7p)

4. Finn QR-faktoriseringen av
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(6p)

5. Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 4e^{2t} \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 2e^{2t} \end{cases}$. (6p)

6. Låt $M_{2\times 2}$ vara rummet av reella 2×2-matriser och låt $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ vara den linjära avbildningen $T(M) = M^t$, där M^t betyder transponatet av M. Finn matrisen A för T i någon bas för $M_{2\times 2}$ och avgör om denna matris är diagonaliserbar eller ej. Finn dessutom baser för egenvärdesrummen för T samt beräkna e^{tA} där $t \in \mathbf{R}$. (6p)

7. Visa att relationen
$$N(A) = V(A^T)^\perp$$
gäller för en matris A. (6p)

8. Antag att $u_1, \ldots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V och att $v \in V$ ej tillhör det underrum U som genereras av $u_1, \ldots, u_m$. Visa att $u_1, \ldots, u_m, v$ är linjärt oberoende. (6p)

VA