1. $A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-2&4&6\\2&-2&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\boxed{-2}\ \boxed{2}\\ \leftarrow\\ \quad\leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&0&0\\0&2&4\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\ \therefore\ \text{Bas } V(A)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right\}.$

Vidare är $x_3=s\Rightarrow x_2=-2s,\ x_1=-s$ så $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-s\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\ \therefore V(A)\cap N(A)=N(A)=\text{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\}.$

---

2. Ekv.syst. $\Leftrightarrow Ax=b$ där $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&2&0\\0&1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-3\\-3\\8\\9\end{pmatrix}$. Lösning i mkm-mening är lösning x till $A^TAx=A^Tb\Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}11&6&-4&-3\\6&7&0&8\\-4&0&6&10\end{array}\right)\begin{matrix}\leftarrow\\ \\ \boxed{1/2}\ \boxed{5}\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&11&22\\6&7&0&8\\-2&0&3&5\end{array}\right)\begin{matrix}\boxed{2}\\ \leftarrow\\ \boxed{3}\leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&6&11&22\\0&7&9&23\\0&12&25&49\end{array}\right)\begin{matrix}\leftarrow\\ \boxed{-1}\\ \leftarrow\end{matrix}$$

$$\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-1\\0&7&9&23\\0&5&16&26\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \leftarrow\\ \boxed{-1}\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-1\\0&2&-7&-3\\0&5&16&26\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \boxed{-2}\\ \leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-1\\0&2&-7&-3\\0&1&30&32\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \leftarrow\\ \boxed{-2}\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-1\\0&0&-67&-67\\0&1&30&32\end{array}\right)\overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-1\\0&1&30&32\\0&0&1&1\end{array}\right)\begin{matrix}\leftarrow\\ \leftarrow\\ \boxed{-30}\ \boxed{-2}\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)\begin{matrix}\leftarrow\\ \boxed{1}\\ \end{matrix}\overset{RE}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

dvs lösningen $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

---

3. $0=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&4&-2\\4&5-\lambda&2\\-2&2&8-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \boxed{1}\\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}9-\lambda&9-\lambda&0\\4&5-\lambda&2\\-2&2&8-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\4&5-\lambda&2\\-2&2&8-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\4&1-\lambda&2\\-2&4&8-\lambda\end{vmatrix}=$

$=(9-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\4&8-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)((8-\lambda)(1-\lambda)-8)=-\lambda(\lambda-9)^2\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=9.$ Egenvektorer: $\lambda=0$: $\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}$

$\begin{pmatrix}1&-1&-4\\5&4&-2\\4&5&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\boxed{-5}\ \boxed{-4}\\ \leftarrow\\ \quad\leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&-4\\0&9&18\\0&9&18\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&-4\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_3=s\\x_2=-2s\\x_1=x_2+4x_3=2s\end{matrix}$ så $x=s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\lambda=9$:

$\begin{pmatrix}-4&4&-2\\4&-4&2\\-2&2&-1\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_2=s\\x_3=t\\x_1=s-\frac{1}{2}t\end{matrix}\Rightarrow x=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{t}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$ Nu gäller att $(1,1,0)\cdot(1,0,-2)\neq 0$. Vi finner en ny egenvektor för $\lambda=9$ genom

$\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=(-1,1,4).$ Då bildar de så erhållna egenvektorerna en ON-bas. $\therefore Q=\begin{pmatrix}2/3&1/\sqrt{2}&-1/3\sqrt{2}\\-2/3&1/\sqrt{2}&1/3\sqrt{2}\\1/3&0&4/3\sqrt{2}\end{pmatrix}\Rightarrow Q^TAQ=\Lambda\equiv\begin{pmatrix}0&&\\&9&\\&&9\end{pmatrix}.$

---

4. $A=\begin{pmatrix}|&|&|\\a_1&a_2&a_3\\|&|&|\end{pmatrix}$, $\tilde{q}_1=a_1,\ q_1=\frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\tilde{q}_2=a_2-(q_1^Ta_2)q_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow q_2=$

$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\tilde{q}_3=a_3-(q_1^Ta_3)q_1-(q_2^Ta_3)q_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}3\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore Q=\begin{pmatrix}|&|&|\\q_1&q_2&q_3\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&0\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&0\\0&2/\sqrt{6}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $R=\begin{pmatrix}q_1^Ta_1&q_1^Ta_2&q_1^Ta_3\\0&q_2^Ta_2&q_2^Ta_3\\0&0&q_3^Ta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&3/\sqrt{6}&3/\sqrt{6}\\0&0&1\end{pmatrix}$ Här är Q ej en ortogonalmatris ty ej kvadratisk, men detta kan erhållas genom att lägga till en fjärde kolonn ortogonal mot de tidigare och av längd 1; då behövs en motsvarande ändring av R genom att lägga till en fjärde rad.

$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(7-\lambda)(2+\lambda)+18 = \lambda^2-5\lambda+4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$. För $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sätt $x = Ty$ där $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ och $y' = T^{-1}ATy + 2e^{2t}T^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}y + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 4y_2 + 2e^{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(y_1e^{-t}) = 0 \\ \frac{d}{dt}(y_2e^{-4t}) = 2e^{-2t} \end{cases} \Leftrightarrow y = c_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c_2e^{4t} - e^{2t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x = Ty = c_1e^tT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c_2e^{4t} - e^{2t})T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

6. $M_{2\times 2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \equiv \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ där e_i, $i = 1, \ldots, 4$ är en bas för $M_{2\times 2}$.
Vi ser att $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = e_3$, $T(e_3) = e_2$, $T(e_4) = e_4$ så $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \ldots & T(e_4) \\ | & & | \end{pmatrix}_{\{e_1,\ldots,e_4\}} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ som är reell, symmetrisk så diagonaliserbar. $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $(\lambda-1)^2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$. $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_4 = 0 \\ x_3 = s \\ x_2 = -s \end{matrix} \Rightarrow$ $x = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ så egenvärdesrum för $\lambda = -1$ för T är $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 = s, & x_3 = t \\ x_4 = u, & x_2 = x_3 = t \end{matrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ så $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ är en bas för egenvärdesrummet för $\lambda = 1$ för T.
Med $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ har vi $Q^tAQ = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = Q\Lambda Q^t \Rightarrow e^{sA} =$ $Qe^{s\Lambda}Q^t = Q\begin{pmatrix} e^{-s} & & & \\ & e^s & & \\ & & e^s & \\ & & & e^s \end{pmatrix}Q^t = \ldots = e^s\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-s}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

7. λ egenvärde, x egenvektor $\Leftrightarrow Ax = \lambda x$, $x \neq 0$: $\lambda\|x\|^2 = \lambda x^Hx = x^H\lambda x = x^HAx = x^HA^Hx =$ $(Ax)^Hx = (\lambda x)^Hx = \bar{\lambda}x^Hx = \bar{\lambda}\|x\|^2 \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\|x\|^2 = 0$ och då $\|x\| \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, dvs λ reell.

---

8. Låt $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ A_1 & \ldots & A_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ så att $Ax = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$ $\Leftarrow$): Antag $0 = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = Ax \Rightarrow A^TAx =$ $A^T0 = 0$ och A^TA inverterbar innebär att ekv. $A^TAx = 0$ endast har lösn. $x = 0$, dvs $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, så kolonnerna är lin. ober. $\Rightarrow$): Antag $A^TAx = 0$. Vi vill visa att $x = 0$. Låt $y \equiv Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ så $\|y\|^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = y \cdot y = y^Ty = (Ax)^TAx = x^TA^TAx = x^T0 = 0 \Rightarrow y = 0$ och då kolonnerna lin. ober. så får vi $0 = y = Ax = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ dvs $x = 0$.