Mat. Metoder fk, del A E2/Ex TMA980a/TMA215, Övningstentamen, 2002-09-28

1. Vi ser att $b \in \mathbb{R}^3$. Mängden av b sådana att det finns (åtminstone) en lösning x till $Ax = b$ är $V(A) \subseteq \mathbb{R}^3$. Vi visar att $V(A)$ delrum i det linjära rummet $\mathbb{R}^3$. Låt $u, v \in V(A)$ dvs $\exists x, y$ s.a. $Ax = u, Ay = V$. Då gäller $u + v = Ax + Ay = A(x + y)$ så $u + v \in V(A)$. Vidare gäller för skalär α att $\alpha u = \alpha Ax = A(\alpha x)$ så $\alpha u \in V(A)$. $\therefore V(A)$ är ett delrum av $\mathbb{R}^3$ och därmed ett linjärt rum.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{-2} \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{2} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Kolonn 1 och 3 i A är en bas för $V(A)$, dvs bas $V(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

---

2. $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 1 = 9a + 3b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \\ 9 = 25a + 5b + c \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{b}$. Vidare, $A^T b = \begin{pmatrix} 299 \\ 65 \\ 15 \end{pmatrix}$

och $A^T A x = A^T b \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 979 & 225 & 55 & 299 \\ 225 & 55 & 15 & 65 \\ 55 & 15 & 5 & 15 \end{array}\right) \begin{matrix} & \leftarrow \\ \leftarrow & \\ \boxed{-3} & \boxed{-11} \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 374 & 60 & 0 & 134 \\ 60 & 10 & 0 & 20 \\ 11 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-6} \\ \\ \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 0 & 14 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 11 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \boxed{-3} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{matrix}$ $\therefore$ $y = x^2 - 4x + 4$ så $y(12) = 144 - 48 + 4 = 100$ så den förväntade månadsförsäljningen efter 12 månader är 100 000 SEK.

---

3. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_1 = a_1 \Rightarrow q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 =$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(2)\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 =$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(1)\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(1)\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vidare är $q_1^T a_1 = \frac{3}{\sqrt{3}}, q_2^T a_2 = 2/\sqrt{6}, q_3^T a_3 = 1/\sqrt{2}$ och från uträkningen ovan har vi $q_1^T a_2 = 2/\sqrt{3}, q_1^T a_3 = 1/\sqrt{3}, q_2^T a_3 = 1/\sqrt{6}$. $\because A = QR$ där $Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 \\ 0 & q_2^T a_2 & q_2^T a_3 \\ 0 & 0 & q_3^T a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

---

4. $x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \perp$ raderna i $A \Leftrightarrow x \perp$ kolonnerna i $A^T \Leftrightarrow x \perp$ span $\{$ kolonnerna i $A^T\} = V(A^T) \Leftrightarrow x \in V(A^T)^\perp$