Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Rolf Liljendahl, 0740-459022
2003–10–24 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Mat. met. fk, del A, E2/Ex, TMA980a//TMV065

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. Finn en bas för värderummet $V(A)$. Finn även $\dim N(A)$. (6p)

2. Lös i minstakvadratmetodens mening det överbestämda ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$. (6p)

3. Finn om möjligt för matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ en faktorisering $PA = LDU$ där P är en permutationsmatris med $\det P = -1$, L och U nedåt repektive uppåt triangulära matriser med ettor på diagonalen och D är en diagonalmatris. (6p)

4. Låt $\mathcal{P}_3$ vara det linjära rummet av polynom av grad mindre än eller lika med 3, försett med skalärprodukten $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Vad är $\dim \mathcal{P}_3$? Finn från basen $\{1, x, x^2, x^3\}$ för $\mathcal{P}_3$ en ortogonalbas (dvs basvektorerna är parvis ortogonala men har ej nödvändigtvis längd 1) för $\mathcal{P}_3$. Finn också $\mathrm{Proj}_{\mathcal{P}_2}(\frac{1}{3}(3x^2-1))$, dvs ortogonalprojektion av $\frac{1}{3}(3x^2-1)$ på underrummet $\mathcal{P}_2$ av polynom av grad mindre än eller lika med 2. (7p)

5. Ange i standardbasen för $\mathbf{R}^3$ matrisen för en linjär avbildning vars nollrum spänns av vektorerna $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ och vars värderum innehåller $(1,1,0)$ som är bilden av $(0,0,1)$. (6p)

6. Finn den lösning $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) + e^t \\ x_3'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) + e^t \end{cases}$$
för vilken $x(0) = 0$. (6p)

7. Visa att en Hermitesk matris har endast reella egenvärden. (6p)

8. Antag att $u_1, \ldots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V och att för $v \in V$ gäller $v \notin \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$. Bestäm dimensionen av $\mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_m, v\}$ och bevisa ditt påstående. (7p)

VA