Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Axel Målqvist, 0740-459022
2004–01–13 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Mat. met. fk, del A, E2/Ex, TMA980a//TMV065

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös i minstakvadratmetodens mening ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases} .$$ (6p)

2. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T AQ$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. (7p)

3. Låt $\lambda \in \mathbb{R}$. Finn för ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \\ 15x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & + & 7x_5 & = & -4 \\ 6x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & -1 \\ (\lambda+3)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 1-\lambda \\ 9x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & + & (5-\lambda)x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \end{cases}$$

dimensionen av nollrummet för koefficientmatrisen. (6p)

4. Finn QR-faktoriseringen av $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (6p)

5. Låt $\mathcal{P}_2$ vara det linjära rummet av polynom av grad mindre än eller lika med två och låt $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara en linjär avbildning definierad av $T(p(x)) = p(3x - 5)$. Finn $\det(T)$, dvs determinanten för avbildningen T. (6p)

6. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$. Finn en triangulering av matrisen A. Använd detta för att finna den lösning $x(t)$ till ekvationssystemet $x' = Ax + f$ för vilken $x(0) = 0$. (6p)

7. Antag att $u_1, \ldots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V och att för $v \in V$ gäller $v \notin \text{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$. Bestäm dimensionen av $\text{span}\{u_1, \ldots, u_m, v\}$ och bevisa ditt påstående. (6p)

8. Definiera begreppet linjär avbildning mellan linjära rum. Visa att en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är injektiv (eller en-entydig) om och endast om ekvationen $T(x) = 0$ endast har den triviala lösningen $x = 0$. Visa också att om så är fallet så är kolonnerna i standardmatrisen för T linjärt oberoende. (7p)

VA