MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Micke Persson, 0739-779268
2004–08–19 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Mat. met. fk, del A, E2/Ex, TMA980a//TMV065

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Finn den linje som i minstakvadratmetodens mening bäst ansluter till de fem punkterna $(2,1),(5,2),(7,3)$ och $(8,3)$. (6p)

2. Finn om möjligt för matrisen $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ en faktorisering $PA = LDU$ där P är en permutationsmatris, L och U nedåt repektive uppåt triangulära matriser med ettor på diagonalen och D är en diagonalmatris. (6p)

3. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T AQ$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. (7p)

4. Finn QR-faktoriseringen av $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (6p)

5. Låt $\mathcal{P}_2$ vara det linjära rummet av polynom av grad mindre än eller lika med två och låt $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vara en linjär avbildning definierad av $T(p(x)) = p(3x-5)$. Finn $\det(T)$, dvs determinanten för avbildningen T. (6p)

6. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$. Finn en triangulering av matrisen A. Använd detta för att finna den lösning $x(t)$ till ekvationssystemet $x' = Ax + f$ för vilken $x(0) = 0$. (6p)

7. Antag att $u_1, \ldots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V och att för $v \in V$ gäller $v \notin \text{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$. Bestäm dimensionen av $\text{span}\{u_1, \ldots, u_m, v\}$ och bevisa ditt påstående. (6p)

8. Definiera begreppet linjär avbildning mellan linjära rum. Visa att en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är injektiv (eller en-entydig) om och endast om ekvationen $T(x) = 0$ endast har den triviala lösningen $x = 0$. Visa också att om så är fallet så är kolonnerna i standardmatrisen för T linjärt oberoende. (7p)

VA