Tentamen i Matematiska metoder fk, E2, del A, TMA980a

OBS! Linje och inskrivningsår samt namn och personnummer skall anges.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Låt $U = V(A)$, (värderummet eller om man så vill kolonnrummet till A), där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
och bestäm en bas för U. Bestäm även $U^\perp$, ortogonala komplementet av U. (6+2p)

2. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $v = (x, y, z)$ på **a)** värderummet $V(A)$ till A, **b)** ortogonala komplementet $V(A)^\perp$ till $V(A)$. (7+2p)

3. Finn en matris som har egenvärden $2, -2, 3$ och motsvarande egenvektorer $(1, 0, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 2)$. (8p)

4. För $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, finn ortogonalmatris Q och uppåt triangulär matris R sådana att $A = QR$. Går det även för $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, att ge en QR-faktorisering som ovan? Om ja, ge en sådan; om nej, varför? (5+4p)

5. Visa att om A är en reell och symmetrisk matris så är egenvektorer hörande till olika egenvärden ortogonala. (8p)

6. Låt A vara en 5×5-matris som uppfyller $A^4 - A^3 + \frac{5}{4}A^2 - A + \frac{1}{4}E = 0$, där E är enhetsmatris. Finn samtliga egenvärden till en sådan matris. Kan en sådan matris vara reell och symmetrisk? Om nej, visa det; om ja, finn alla sådana matriser. (4+4p)

VA